



HOCHSCHULE RUHR WEST
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Stationäre Rohrströmungen

Masterarbeit

im Studiengang Systemtechnik
an der Hochschule Ruhr West

von

Martin Waciewski

Matrikelnr. 10008543

Erstgutachter:	Prof. Dr. Sabrina Gippert
Zweitgutachter:	Prof. Dr. rer. nat. Andrea Ostendorf
Abgabedatum:	24.01.2024

Mülheim an der Ruhr, Januar 2024

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbständig angefertigt habe. Es wurden nur die in der Arbeit ausdrücklich benannten Quellen und Hilfsmittel benutzt. Wörtlich oder sinngemäß übernommenes Gedankengut habe ich als solches kenntlich gemacht. Die vorgelegte Arbeit hat weder in der gegenwärtigen noch in einer anderen Fassung schon einem anderen Fachbereich der Hochschule Ruhr West oder einer anderen wissenschaftlichen Hochschule vorgelegen.

Duisburg 23.01.2024

Ort, Datum

M. Wozniak

Unterschrift

Kurzfassung

Das Ziel dieser Masterarbeit ist, eine Software zur Simulation von stationären Strömungsnetzwerken zu entwickeln. Dies soll für ein beliebig angeordnetes Netz mit unterschiedlichen Randbedingungen funktionieren. Die Parameter für die Leitungsgeometrie und Pumpeneinspeisungen an den Netzknoten werden vorgegeben.

Das gesamte Gleichungssystem wird dynamisch anhand der aktuellen Parameter und Variablen aufgestellt. Dabei sind für Strömungssysteme mit Rohrleitungen und Ventile die Druckverluste und Strömungsgeschwindigkeiten entscheidend. Die Berechnung der Druckverluste durch Reibung erfolgt abhängig von Fluideigenschaften wie Viskosität und Dichte, aber auch von Volumenstrom und Rohrreibungszahl. Es wird auch eine Unterscheidung getroffen, ob die Strömung turbulent oder laminar ist.

Die Berechnung des Netzwerkes wird mit einem geeigneten numerischen Verfahren realisiert, wobei entscheidende Kriterien sind, wie hoch die Iterationszahl und das Konvergenzverhalten ist. Der Einfluss der Startwerte auf die Simulation wird untersucht. In einem Benchmark wird die implementierte Lösung mit der Software DSHplus und Simscape verglichen.

Schlagwörter: Druckverlust, Rohrreibung, Bernoulli, Reynoldszahl, Netzwerkanalyse

Abstract

The aim of this master thesis is to develop a software to simulate stationary flow networks. This is intended to work for an arbitrarily arranged network with different boundary conditions. The parameters for the pipe geometry and pump feeds at the network nodes are specified.

The entire system of equations is set up dynamically based on the current parameters and variables. The pressure losses and flow velocities are crucial for flow systems with pipes and valves. The calculation of pressure losses due to friction depends on fluid properties such as viscosity and density, but also on flow rate and pipe friction coefficient. A distinction is also made depending on whether the flow is turbulent or laminar.

The network is calculated using a suitable numerical method, whereby the decisive criteria are the number of iterations and the convergence behavior. The influence of the initial values on the simulation is investigated. The implemented software solution is compared with DSHplus and Simscape in a benchmark.

Keywords: pressure loss, pipe friction, Bernoulli, Reynolds number, network analysis

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	VIII
1 Einleitung	1
2 Theoretische Grundlagen	2
2.1 Druckverlust in einer Rohrströmung	2
2.2 Rohrreibungsbeiwert	4
2.2.1 Moody-Diagramm	4
2.2.2 Colebrook-White-Gleichung	6
2.2.3 Näherungsformeln für den Rohrreibungsbeiwert	8
2.3 Kontinuitätsgleichung	9
2.4 Gesetz von Bernoulli für inkompressible Fluide	11
2.4.1 Alternativformen der Bernoulli-Gleichung	14
2.4.2 Verlustbehaftete Bernoulli-Gleichung	17
2.5 Knotenverknüpfung zweier Rohrleitungen	18
2.6 Beispielrechnung	20
3 Modellierung des Systems	23
3.1 System mit Knotenverbindung	23
3.1.1 Aufbau von Druck- und Knotengleichungen	23
3.1.2 Newton-Verfahren im Mehrdimensionalen	24
3.1.3 Aufbau der Jacobi-Matrix	24
3.1.4 Implementierung in GNU Octave	25
3.2 System mit Knotenverzweigungen	29
3.2.1 Aufbau der Druck- und Knotengleichungen	29
3.2.2 Aufbau der Jacobi-Matrix	30
3.2.3 Implementierung in GNU-Octave	31
3.3 Konvergenzrate	32
3.3.1 Formel für einen Iterationsschritt	32
3.3.2 Konvergenzverhalten	32
3.4 Verallgemeinerung der Systems	38
3.4.1 Portverbindungen	38

3.4.2	Knotengleichungen aus Portverbindungen	39
3.4.3	Algorithmus für Knotenmatrix	39
3.4.4	Druckbilanzgleichung aus Portverbindungen	40
3.4.5	Jacobi-Matrix	41
3.4.6	Algorithmus für Druckdifferenzmatrix	42
3.5	Erweiterung des Gleichungssystems	45
3.5.1	Colebrook-White-Gleichungen	45
3.5.2	Druckbilanzgleichungen	49
3.6	Erweiterung der Jacobi-Matrix	52
3.6.1	Grundstruktur	52
3.6.2	Blockmatrix für Druckgleichungen	52
3.6.3	Blockmatrix für Knotenbilanzgleichungen	53
3.6.4	Blockmatrix für Colebrook-White-Gleichungen	53
3.6.5	Zusammenfassung und Beispiel	54
4	Implementierung und Simulation	57
4.1	Jacobi-Matrix	57
4.2	Beispielsystem 1	58
4.2.1	Startbedingungen	58
4.2.2	Konvergenzrate pro Iteration	59
4.2.3	Simulation mit ungünstigen Anfangswerten	60
4.2.4	Konvergenzverhalten	63
4.2.5	Skalierung des Gleichungssystems	64
4.3	Numerische Berechnung der Jacobi-Matrix	67
4.3.1	Implementierung mit finiten Differenzen	68
4.3.2	Numerisches Beispiel	70
4.4	Erweiterung für laminaren Fall	70
4.4.1	Druckgleichungen	71
4.4.2	Implementierung	73
5	Verifikation	76
5.1	Beispielsystem 1	76
5.1.1	Grenzregion der Reynoldszahl	77
5.1.2	Simulation in DSHplus	80

5.1.3 Simulation in Simscape Fluids	81
5.1.4 Vergleich zu eigener Lösung	82
5.2 Rein turbulenter Fall	83
5.2.1 Simulation in DSHplus	83
5.2.2 Simulation in Simscape Fluids	83
5.2.3 Vergleich der Ergebnisse	84
5.3 Beispielsystem 2	86
5.3.1 Simulation in Simscape Fluids	86
5.3.2 Simulation in DSHplus	87
5.3.3 Simulation in eigener Lösung	88
6 Zusammenfassung und Fazit	90
Literaturverzeichnis	91

Abbildungsverzeichnis

1.1:	Moody-Diagramm für eine geradlinige Rohrströmung	4
1.2:	Ablezen der Reynoldszahl im Moody-Diagramm	5
1.3:	Ablezen der Rohrreibungszahl im Moody-Diagramm	5
1.4:	Modell einer Strömungsröhre für Kontinuitätsgleichung	9
1.5:	Verlauf der spezifischen Energie entlang einer Stromröhre	12
1.6:	Model einer Stromröhre für Bernoulli-Gleichung	13
1.7:	Statischer und dynamischer Druck im Rohr	16
1.8:	Modell einer Stromröhre	18
1.9:	Modell einer Knotenverbindung	19
2.1:	Strömungsgeschwindigkeit und Druck pro Iteration	35
2.2:	Konvergenzrate für Geschwindigkeit und Druck pro Iteration	37
2.3:	Modell eines Beispielsystems mit Verzweigungen	38
2.4:	Abhängigkeit der Colebrook-White-Gleichung vom Reibungsfaktor	47
2.5:	Plot der Colebrook-White-Gleichung	49
2.6:	Plot der Druckgleichung nach Bernoulli	50
2.7:	Plot der Colebrook-White-Gleichung	51
2.8:	System mit zwei Knoten und vier Rohren	55
3.1:	Beispielsystem 1	58
3.2:	Grenzen des Konvergenzverhaltens	63
3.3:	Konvergenzverhalten mit angepasster Schrittweite	64
3.4:	Verbessertes Konvergenzverhalten mit Skalierung	65
4.1:	Modell mit vier Rohren und zwei Knoten	76
4.2:	Simulationslauf in DSHplus (Beispiel 1)	80
4.3:	Simulationsparameter in DSHplus	81
4.4:	Simulationslauf in Simscape (Beispiel 1)	82
4.5:	Simulationslauf in DSHplus (Beispiel 1, rein turbulent)	83
4.6:	Simulationslauf in Simscape (Beispiel 2, rein turbulent)	84
4.7:	Simulationslauf in Simscape (Beispiel 2, rein turbulent)	86
4.8:	Simulationslauf in DSHplus (Beispiel 2, rein turbulent)	87
4.9:	Variablenwerte bei den Iterationsschritten	88
4.10:	Konvergenzverhalten	89

1 Einleitung

Zu Beginn dieser Masterarbeit werden theoretische Grundlagen benötigt. Relevant sind hier einige Gebiete der Fluidodynamik, aber auch Numerik wird benötigt. Für die Simulation spielen Fluideigenschaften wie Dichte und Viskosität bei der stationären Strömung eine große Rolle. Die Kompressibilität des Fluids und der Rohrleitungen kann vernachlässigt werden, wenn es sich um eine stationäre Strömung handelt. In diesem Fall sind alle Dynamiken, welche den Druck beeinflussen können, bereits abgeklungen. Im Fall einer instationären Strömung würde die Kompressibilität durchaus Einfluss auf Druckstöße haben.

Zur Vereinfachung der Modellierung werden Dichte und Viskosität als konstant angenommen. Die Temperatur des Fluids bestimmt diese Parameter zu Beginn, eine Druckabhängigkeit von Dichte und Viskosität wird in der Software DSHplus über Kennlinien simuliert. Bei der Viskosität gibt es auch eine Druckabhängigkeit. Man muss aber anmerken, dass diese Einflüsse bei mäßigen Systemdrücken eher klein sind.

Das resultierende Gleichungssystem wird in GNU Octave, einer quelloffenen Alternative zu MATLAB basierend auf Python-Bibliotheken, aufgestellt und an einen Löser für nichtlineare Systeme übergeben werden. Dieser Löser wird in dieser Arbeit für diese Aufgabenstellung selbst implementiert. Das Gleichungssystem, welches für den Löser benötigt wird, muss dazu hergeleitet werden.

Zur eindimensionalen Strömungssimulation für hydraulische oder pneumatische Systeme gibt es verschiedene Programme wie Simcenter Flomaster, FluidSIM und DSHPlus. In Simulink vom Hersteller MathWorks existiert eine Anbindung an Simscape Fluids, einer weiteren Toolbox von MATLAB. Der Schwerpunkt liegt beim Vergleich der Software DSHplus und Simscape Fluids zur eigenen Implementation.

Im Verlauf der Arbeit werden zunächst theoretische Grundlagen behandelt, anschließend das System eines Fluidnetzwerkes modelliert und implementiert. Zum Schluss werden die Ergebnisse in einer Art Benchmark untereinander verglichen.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Druckverlust in einer Rohrströmung

Für den Druckverlust gilt allgemein die empirische Darcy-Weisbach-Gleichung [1, 2]:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} v^2 \stackrel{(d=2r)}{=} \lambda \frac{l}{r} \frac{\rho}{4} v^2$$

Der Zusammenhang zwischen Druckdifferenz und Volumenstrom wird über das Hagen-Poiseuille-Gesetz [3] beschrieben, wenn als Einschränkung eine laminare Strömung vorausgesetzt wird. Die differentielle Schreibweise auch für sehr kurze Rohre, wenn die Rohrlänge in der Größenordnung des Innenradius liegt.

$$\dot{V} = -\frac{\pi}{8} \frac{r^4}{\eta} \frac{dp}{dx}$$

Für ausreichend lange Rohre mit $l \gg r$ gilt neben der differentiellen Schreibweise außerdem eine Formel, in der die Rohrlänge l als Variable vorkommt und die Druckdifferenz sich über das gesamte Rohr bezieht. Dann gilt mit $dp / dx = \Delta p / \Delta l$ die Formel

$$\dot{V} = \frac{\pi}{8\eta} \frac{r^4}{l} \Delta p$$

Umgestellt ergibt dies die vom Volumenstrom abhängige Druckgleichung:

$$\Delta p = \frac{8\eta}{\pi} \frac{l}{r^4} \dot{V}$$

Mit der Voraussetzung eines kreisrunden Querschnitts wird der Volumenstrom mit $\dot{V} = Av$ ersetzt. Damit hängt die Druckdifferenz von der Strömungsgeschwindigkeit ab:

$$\Delta p = \frac{8\eta}{\pi} \frac{l}{r^4} Av = \frac{8\eta}{\pi} \frac{l}{r^4} \pi r^2 v = 8\eta \frac{l}{r^2} v = f(\eta, l, r, v)$$

Die Druckgleichung kann daher als Funktion von vier Variablen definiert werden. Setzt man dies mit der Darcy-Weisbach-Gleichung gleich, ist die Rohrreibungszahl bestimmbar.

$$\begin{aligned}
8\eta \frac{l}{r^2} v &= \lambda \frac{l}{r} \frac{\rho}{4} v^2 \\
8\eta \frac{1}{r} &= \lambda \frac{\rho}{4} v \\
32\eta &= \lambda \rho v r
\end{aligned}$$

Statt des Radius wird der Durchmesser angegeben, was den Zusammenhang ergibt:

$$64 = \lambda \frac{\rho v d}{\eta}$$

Der rechte Bruch neben λ entspricht der Reynoldszahl. Im laminaren Fall ist dieser Rohrreibwert daher nur von der Reynoldszahl abhängig und es gilt demnach

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} = f(\text{Re})$$

Mit der für Rohrströmungen geltenden Reynoldszahl [4] eingesetzt ergibt dies:

$$\text{Re}(v_m) = \frac{\rho v_m d}{\eta} = \frac{v_m d}{\nu}$$

Da in der technischen Anwendung häufig mit Volumenströmen statt mit der Strömungsgeschwindigkeit gerechnet wird, wird die mittlere Strömungsgeschwindigkeit über den Zusammenhang $Q = A v_m$ ersetzt. Der Rohrdurchmesser ist bei einer geraden Rohrleitung als Voraussetzung für die Gültigkeit der Formel konstant.

$$\text{Re} = \frac{\rho d}{\eta} v_m = \frac{\rho d}{\eta} \frac{Q}{A} = \frac{4}{\pi d} \frac{\rho}{\eta} Q, \quad \text{mit } v_m = \frac{Q}{A}$$

Somit kann man die Reynoldszahl abhängig vom Volumenstrom $Q = \dot{V}$ angeben. Anstelle von Dichte und dynamischer Viskosität kann auch die kinematische Viskosität verwendet werden, wobei der Zusammenhang $\rho = \nu \cdot \eta$ gilt [5]. Dann gilt für die Reynoldszahl:

$$\text{Re}(Q) = \frac{4}{\pi d} \frac{\rho}{\eta} Q = \frac{4}{\pi \nu d} Q$$

Für eine laminare Strömung wird der Rohrreibwert nicht benötigt, um den Druckverlust zu berechnen, kann aber ersatzweise für die Darcy-Weisbach-Gleichung verwendet werden. So kann die gleiche Druckverlustgleichung sowohl für den laminaren als auch turbulenten Fall verwendet werden. Nur die Berechnung des Rohrreibwerts ist unterschiedlich.

2.2 Rohrreibungsbeiwert

2.2.1 Moody-Diagramm

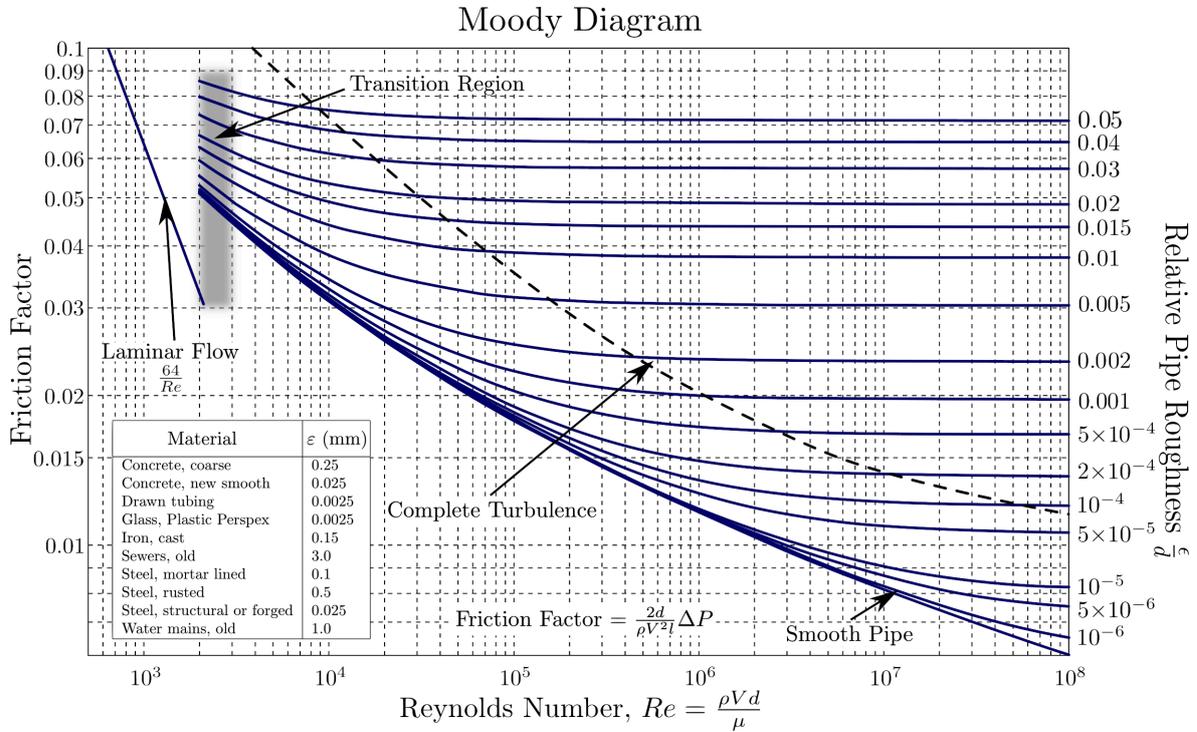


Abbildung 1.1: Moody-Diagramm für eine geradlinige Rohrströmung

Das Moody-Diagramm [6, 7] in Abbildung 1.1 dient dazu, die Berechnung des Druckverlustes in einer Rohrleitung mittels des Rohrreibungsbeiwertes zu erleichtern. Beide Achsen sind logarithmisch und einheitenlos. Für den Reibungsfaktor gilt mit der umgestellten Darcy-Weisbach-Gleichung [2] der Zusammenhang:

$$\lambda = 2 \frac{d}{\rho v^2 l} \Delta p$$

Ist der Druckverlust bekannt, kann daraus der Rohrreibungsbeiwert berechnet werden und im Diagramm die Reynoldszahl abgelesen werden (siehe Abbildung 2). Dazu wird, horizontal von links in Höhe des Reibungsfaktors ausgehend, der Schnittpunkt mit der Kurve gefunden, welcher zur passenden relativen Rauheit gehört. Von dort wird, senkrecht nach unten, der Schnittpunkt mit der x -Achse gesucht. Dies ist hilfreich, wenn man eine turbulente Strömung bereits voraussetzen kann und eine grobe Abschätzung der Reynoldszahl benötigt. In diesem Beispiel ergibt dies eine Reynoldszahl von 3×10^5 .

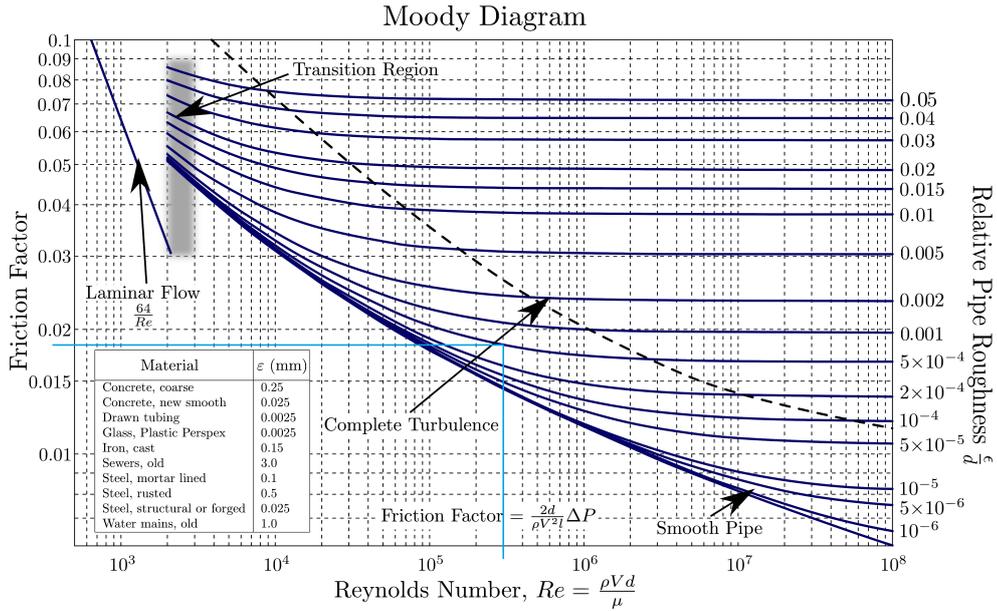


Abbildung 1.2: Ablesen der Reynoldszahl im Moody-Diagramm

Da man die Reynoldszahl über Rohrgeometrie, Dichte und Viskosität bereits explizit bestimmen kann, kann das Moody-Diagramm auch dazu dienen, den Reibungsfaktor abzulesen. Die relative Rauheit muss dazu bekannt sein, in dem Beispiel nach Abbildung 3 hat diese einen Wert von 0,01. Es wird ausgehend von der x -Achse (Reynoldszahl 2×10^6) der Schnittpunkt mit der entsprechenden Kurve gesucht und so der Wert an der y -Achse abgelesen. Der Druckverlust im Rohr wird anschließend mithilfe des ermittelten Reibungsfaktors bzw. Rohrreibungsbeiwerts berechnet.

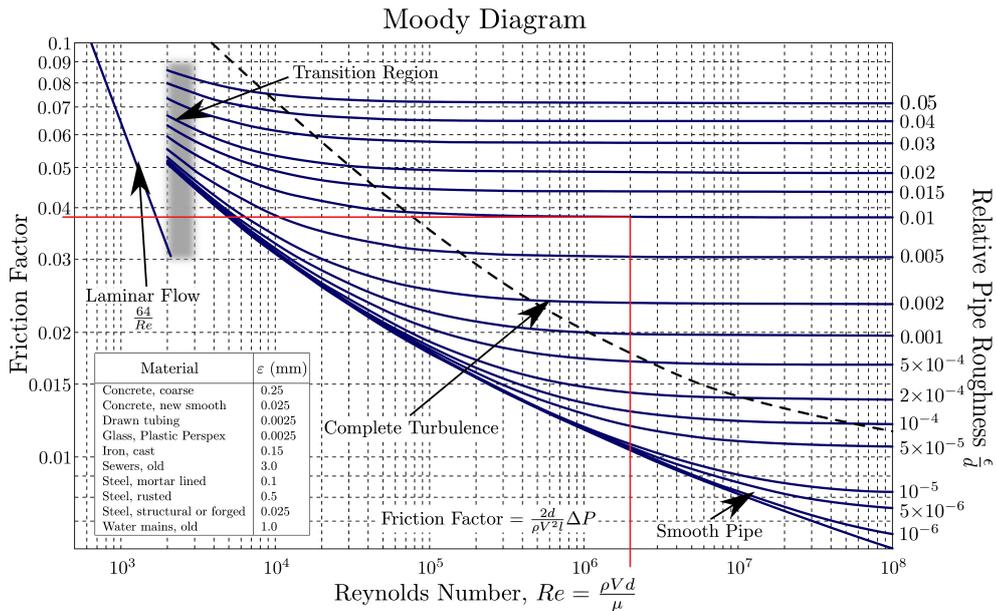


Abbildung 1.3: Ablesen der Rohrreibungszahl im Moody-Diagramm

Die x -Achse, welche der Reynoldszahl entspricht, deckt im Diagramm einen großen Wertebereich von 10^3 bis 10^8 ab. Mithilfe der Reynoldszahl kann das gleiche Strömungsverhalten in einem miniaturisierten Modell nachgebildet werden, solange diese Zahl konstant bleibt. Die Reynoldszahl hängt nur von der Strömungsgeschwindigkeit v , Dichte ρ und dynamischer Viskosität η , sowie vom Rohrdurchmesser d ab. Im Diagramm wurde eine andere Notation für die dynamische Viskosität verwendet. Für die Reynoldszahl gilt:

$$\text{Re} = \frac{\rho v d}{\eta} = f(\rho, \eta, d, v), \text{ bzw. } \text{Re} = \frac{\rho V d}{\mu} = f(\rho, \mu, d, V)$$

Im Diagramm sind die einheitenlosen Rohrreibbeiwerte links auf der y -Achse logarithmisch aufgetragen. Als Skala ist ein Wertebereich von 0,01 bis 0,1 abgebildet. Für eine vollständig laminare Strömung ist der Rohrreibbeiwert eindeutig bekannt und kann als Funktion abhängig von der Reynoldszahl dargestellt werden.

Im Fall von vollständig turbulenter Strömung gibt es keine explizite Funktion, sondern eine implizite Darstellung als Gleichungssystem, welches zuerst gelöst werden muss. Für laminare und turbulente Strömung gelten also die allgemeinen Zusammenhänge [2]:

$$\begin{aligned} \text{laminar: } \lambda &= \frac{64}{\text{Re}} = f(\text{Re}), \\ \text{turbulent: } 0 &= f\left(\text{Re}, \frac{d}{k}, \lambda\right) \text{ bzw. } f\left(\text{Re}, \frac{d}{\varepsilon}, \lambda\right) \end{aligned}$$

Im Diagramm rechts ist die relative Rauheit $\frac{\varepsilon}{d}$ (in deutscher Literatur auch $\frac{k}{d}$) aufgetragen, die den jeweiligen Kurven entsprechen. Für jede relative Rauheit existiert eine solche Kurve für den turbulenten Fall, daher wird auch von einer Kurvenschar gesprochen.

2.2.2 Colebrook-White-Gleichung

Für die Verknüpfung von Rohrrauheit, Reynoldszahl und Darcy-Weisbach-Gleichung ist die sogenannte Colebrook-White-Gleichung [3, 8] zuständig. Diese ist für den Bereich mit einer Reynoldszahl $\text{Re} > 4000$ [9] gültig. Allgemein gilt der Zusammenhang

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{c_1}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{c_2 d} \right), \quad \text{mit } c_1 \approx 2,51 \text{ und } c_2 \approx 3,71$$

Die Konstanten c_1 und c_2 sind empirisch bestimmt und keine exakten Größen. Dabei wurden Daten aus Experimenten für einer turbulente Rohrströmung bei hydraulisch rauhen und glatten Rohrleitungen anhand einer Funktion gefittet.

Im Falle eines hydraulisch glatten Rohrs ist die relative Rauheit k/d im Vergleich zum anderen Term in der Klammer vernachlässigbar klein, im Moody-Diagramm entspricht dies der untersten Kurve im turbulenten Bereich. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die Rauheit k gegen 0 geht. Die Gleichung vereinfacht sich damit zu

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \lim_{k \rightarrow 0} \left(-2 \log_{10} \left(\frac{c_1}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{k}{c_2 d} \right) \right) = -2 \log_{10} \left(\frac{c_1}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} \right)$$

Dieser Zusammenhang wird auch als iterative Formel von Prandtl [10] genannt und hat in dieser Darstellung keine exakte Lösung. Die Gleichung kann jedoch mit einem geeigneten Startwert iterativ gelöst werden. Mithilfe der Logarithmusgesetze kann man die Gleichung vereinfacht darstellen:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{c_1}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} \right) = 2 \log_{10} (\text{Re}\sqrt{\lambda}) - 2 \log_{10} (c_1)$$

Mit $c_1 \approx 2,51$ und $\log_{10}(2,51) \approx 0,4$ erhält man schließlich

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log_{10} (\text{Re}\sqrt{\lambda}) - 0,8$$

Liegt dagegen ein hydraulisch raues Rohr vor, ist auch die Rauheit k relativ groß und der Term $\frac{k}{c_2 d}$ überwiegt. In der Colebrook-White-Gleichung entspricht dies einer Rauheit k , die gegen unendlich geht.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-2 \log_{10} \left(\frac{c_1}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{k}{c_2 d} \right) \right) = -2 \log_{10} \left(\frac{k}{c_2 d} \right)$$

Das ergibt mit der Konstante $c_2 = 3,71$ schließlich die Formel von Nikuradse [3, 11]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{1}{3,71} \frac{k}{d} \right)$$

Die ursprüngliche Colebrook-White-Gleichung in der Form $(\sqrt{\lambda})^{-1} = -2 \log_{10}(A + B)$ gilt eigentlich für den Übergangsbereich, wenn es sich nicht vollständig um ein hydraulisch raues oder glattes Rohr handelt. Für sehr kleine oder große Rauheiten ergeben sich näherungsweise

die beiden Formeln, welche die Grenzfälle „hydraulisch rau“ und „hydraulisch glatt“ abdecken, und sind damit Vereinfachungen der Colebrook-White-Gleichung.

2.2.3 Näherungsformeln für den Rohrreibungsbeiwert

Die Colebrook-White-Gleichung ist eine implizite Funktion, die erst numerisch gelöst werden muss. Daher gibt es Näherungsformeln, welche in einem bestimmten Bereich der Reynoldszahl annähernd genau gelten und mit denen der Rohrreibungsbeiwert direkt berechnet werden kann.

Für die Annahme eines hydraulisch glatten Rohres kann der Rohrreibungsbeiwert näherungsweise über die Formel nach Blasius [12] berechnet werden.

$$\lambda_{\text{glatt}} = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}} = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}}, \quad \text{Re} < 10^5$$

Diese Näherungsformel gilt für die Einschränkung einer Reynoldszahl kleiner 100.000, daher gibt es weitere Gleichungen, welche die Colebrook-White-Gleichung annähern.

Die Haaland-Gleichung [13] ähnelt der Colebrook-White-Gleichung vom Aufbau her, wobei der Term $\sqrt{\lambda}$ nur noch auf der linken Seite steht.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1,8 \log \left(\frac{\varepsilon}{c_1 d} + \frac{c_2}{\text{Re}} \right), \quad c_1 = 3.7, \quad c_2 = 6.9$$

Dabei steht ε für die relative Rauheit k/d , welche überwiegend anstelle der absoluten Rauhtiefe k in der technischen Anwendung zu finden ist. Der Wert auf der rechten Seite wird als Zwischenschritte invertiert und quadriert, dies ist numerisch mit Gleitkommazahlen schnell und mit hoher Präzision möglich. Ansonsten kann man die Formel direkt nach dem Rohrreibbeiwert umstellen, wenn man die Zwischenschritte umgehen möchte.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1,8 \log_{10} \left(\left(\frac{\varepsilon}{3,7d} \right)^{1,11} + \frac{6,9}{\text{Re}} \right) \quad |(\dots)^{-2}$$

$$\lambda = (-1,8)^{-2} \left[\log_{10} \left(\left(\frac{\varepsilon}{3,7d} \right)^{1,11} + \frac{6,9}{\text{Re}} \right) \right]^{-2}$$

Der Nachteil bei dieser numerischen Berechnung ist, dass je nach Implementierung der Zehnerlogarithmus möglicherweise zweimal berechnet, invertiert und dann multipliziert wird.

Der Grund ist, dass durch den Faktor „-2“ die interne Potenzfunktion angewendet wird, welche auch rationale Zahlen als Potenz behandeln kann. Eine leichtere Operation ist es, den Logarithmus einmal zu berechnen und das Zwischenergebnis miteinander zu multipliziert. Natürlich gibt es auch Compiler, welche dies als Optimierung automatisch machen.

2.3 Kontinuitätsgleichung

Eine einfache Stromröhre kann wie in Abbildung 4 dargestellt werden [14]. In diesem Fall liegt am Querschnitt A_1 der Zufluss einer Strömung, welche am Querschnitt A_2 hinausfließt. Die Tatsache, dass der Querschnitt an beiden Seiten unterschiedlich ist, wird bei den Kontinuitätsgleichungen berücksichtigt. Die Rechtecke an beiden Seiten symbolisiert die Flüssigkeitsmenge, welche sowohl hinein als auch wieder hinausfließt. So fließt eine Masse m_1 als Flüssigkeit am Ausgang als Masse m_2 hinaus. Natürlich sind beide Massen aufgrund des physikalischen Prinzips der Massenerhaltung gleich groß, da keine Flüssigkeit in der Stromröhre verloren geht. Daher gilt $m_1 = m_2$ und über Dichte und Volumen $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$.

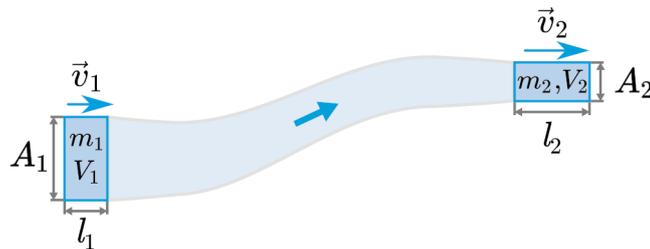


Abbildung 1.4: Modell einer Strömungsröhre für Kontinuitätsgleichung

Bei einer kompressiblen Flüssigkeit können die Dichten ρ_1 , ρ_2 und Volumina V_1 , V_2 unterschiedlich sein, das Prinzip des Massenerhalts gilt auch unter diesen Bedingungen. Über die Querschnittsgröße kann das Volumen des Flüssigkeitspakets bestimmt werden:

$$V_1 = A_1 l_1, \quad V_2 = A_2 l_2$$

Beide Ausdrücke werden in die Gleichung für die Massenerhaltung $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$ eingesetzt und man erhält nun:

$$m_1 = \rho_1 A_1 l_1 = \rho_2 A_2 l_2 = m_2$$

Geht man nun von einer stationären Strömung aus, führt das dazu, dass die Flüssigkeit keine Beschleunigung am Einlass und Auslass erfährt. Innerhalb der Stromröhre verengt sich der Querschnitt und die Flüssigkeit wird beschleunigt, da sie bei kleinerem Querschnitt

für einen gleichen Massestrom schneller fließen muss. Auf beiden Seiten der Stromröhre wird das Volumen daher in der gleichen Zeit t bewegt, wobei es jeweils um die Längen l_1 , l_2 verschoben wird. Dann gilt für die Geschwindigkeiten:

$$v_1 = \frac{l_1}{t}, \quad v_2 = \frac{l_2}{t}$$

Teilt man die Gleichung für die Massenerhaltung durch die Zeit t , können einige Terme zu Geschwindigkeiten ersetzt werden. Masse pro Zeit entspricht dabei einem Massestrom.

$$\frac{m_1}{t} = \rho_1 A_1 \frac{l_1}{\frac{t}{v_1}} = \rho_2 A_2 \frac{l_2}{\frac{t}{v_2}} = \frac{m_2}{t}$$

Allgemein bedeutet dies für eine kontinuierliche Stromröhre, dass der Massestrom an jeder Stelle konstant ist. Das Vorgehen, also das Gleichsetzen zweier Bilanzgleichungen für den Massestrom, kann man aufgrund dieser Tatsache für beliebige Punkte durchführen.

$$\frac{m}{t} = \rho A v = \text{konst.}$$

Da es sich um eine stationäre Strömung handelt, ist zusätzlich der Massestrom an jeder Stelle zeitlich konstant. Der Massestrom variiert dann nur über den Ort entlang der Stromröhre. In diesem Fall darf man das Verhältnis Masse pro Zeit auch infinitesimal als Massestrom $\dot{m} = \frac{d}{dt} m(t)$ mit der Einheit $[\dot{m}] = 1 \text{ kg s}^{-1}$ bezeichnen.

Ist die Flüssigkeit außerdem inkompressibel, also wenn $\rho = \text{konst.}$ entlang der Stromröhre gilt, kann in der Bilanzgleichung für den Massestrom auf beiden Seiten durch die Dichte geteilt werden. So kann die Bilanzgleichung umgeschrieben werden zu:

$$\frac{m_1}{t} = \rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2 = \frac{m_2}{t} \xrightarrow{\frac{1}{\rho}} \frac{m_1}{\rho t} = A_1 v_1 = A_2 v_2 = \frac{m_2}{\rho t}$$

Über den Zusammenhang, dass die Dichte eines Fluids der Masse pro Volumen entspricht, kann die Gleichung vereinfacht werden zu:

$$\frac{V_1}{t} = A_1 v_1 = A_2 v_2 = \frac{V_2}{t}, \quad \text{mit } V = \frac{m}{\rho}$$

Ähnlich wie beim Erhalt des Massestroms folgt nun als zusätzliche Bedingung beim inkompressiblen Fluid, dass der Ausdruck $\frac{V}{t} = Av$ entlang der Stromröhre konstant, also eine Erhaltungsgröße ist. Auch hier darf analog zum Massestrom das Verhältnis $\frac{V}{t}$ mit dem

Volumenstrom \dot{V} , also der zeitlichen Ableitung von $V(t)$, gleichsetzen. In SI-Einheiten gilt für den Volumenstrom $[\dot{V}] = 1 \text{ m}^3/\text{s}$, aber in der Praxis sind häufig auch $[\dot{V}] = 1 \text{ l/s}$ oder $[\dot{V}] = 1 \text{ l/min}$ als Einheiten anzutreffen.

2.4 Gesetz von Bernoulli für inkompressible Fluide

Die Bernoulli'sche Gleichung zwischen zwei Punkten einer Stromlinie lautet [3, 11]:

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0$$

Diese gilt in dieser Ausführung nur für den Fall mit den Bedingungen:

- **Stromlinie:** gleicher Zeitpunkt zwischen zwei Punkten
- **Strömung:** stationäre und instationär
- **Fluid:** inkompressibel und reibungsfrei
- **Feldgröße:** Schwerfeld

Der differentielle Term $\frac{\partial v}{\partial t}$ auf der linken Seite der Gleichung steht für den instationären Anteil, welcher sich durch die zeitliche Änderung der Strömungsgeschwindigkeit ergibt. Diese Änderungsrate wird entlang der Stromlinie zwischen zwei Punkten integriert. Das Ergebnis entspricht der spezifischen Beschleunigungsarbeit. Zur Erinnerung:

$$\left[w_{\text{spez.}} \right] = \left[\frac{W}{m} \right] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}, \quad \left[w_{\text{spez.}} \right] = \left[\frac{W}{\rho V} \right] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^3} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Wir beschränken uns nun auf den Fall einer stationären Strömung, sodass folgendes gilt:

- rein stationäre Strömung
- nur für inkompressible Fluide
- nur Schwerfeld als äußere Feldgröße

Bei einer stationären Strömung ist die Strömungsgeschwindigkeit zeitlich konstant. Damit kann die Bernoulli-Gleichung vereinfacht werden, weil die zeitliche Ableitung gleich null ist und so der Term für die Beschleunigungsarbeit entfällt.

$$\underbrace{\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}}_{\text{spez. kinetische Energie}} + \underbrace{g(z_2 - z_1)}_{\text{spez. Hubarbeit}} + \underbrace{\frac{p_2 - p_1}{\rho}}_{\text{spez. Druckenergie}} = 0$$

Einheitenrechnung bestätigt, dass es sich jeweils um spezifische Energie bzw. Arbeit handelt:

$$\left[\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}, \quad \left[g(z_2 - z_1) \right] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}, \quad \left[\frac{p_2 - p_1}{\rho} \right] = \frac{\text{N m}^{-2}}{\text{kg m}^{-3}} = \frac{\text{kg m s}^{-2} \text{m}^{-2}}{\text{kg m}^{-3}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Zwischen zwei Punkten zeigt sich nach Umstellen die Bilanzgleichung

$$\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}$$

Durch die Tatsache, dass die spezifische Gesamtenergie entlang einer Stromlinie konstant ist, können die Bilanzgleichungen für signifikante Stellen aufgestellt werden. Allgemein bedeutet das mit der spezifischen Energie e entlang einer Stromröhre:

$$e = \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{konst.}$$

Dies kann man an einem Beispiel anwenden, wo drei signifikante Bereiche durch die Stellen s_1 , s_2 und s_3 dargestellt sind. Der Querschnitt wächst von Stelle s_2 bis s_3 gleichmäßig:

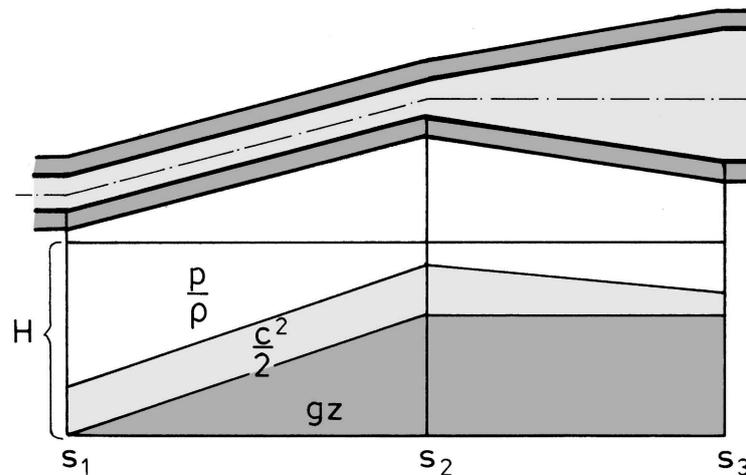


Abbildung 1.5: Verlauf der spezifischen Energie entlang einer Stromröhre

$$\begin{aligned} s_{12} : \quad & \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}, \\ s_{23} : \quad & \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{v_3^2}{2} + gz_3 + \frac{p_3}{\rho}, \\ s_{13} : \quad & \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_3^2}{2} + gz_3 + \frac{p_3}{\rho} \end{aligned}$$

Da die spezifische Gesamtenergie über der Stromlinie entlang konstant bleibt, können einzelne Bilanzgleichungen aufgestellt werden. Die Energiebilanz gilt natürlich auch, wenn man den Pfad s_1 nach s_3 komplett betrachtet.

Betrachtet man einen Pfad genauer, kann die Bilanzgleichung direkt hergeleitet werden. Ein Beispiel wäre ein Schlauch, der symbolisch für eine Stromröhre steht. Dieser hat am Ausgang auf der rechten Seite einen kleineren Querschnitt A_2 und liegt dort auf einer Höhe h_2 .

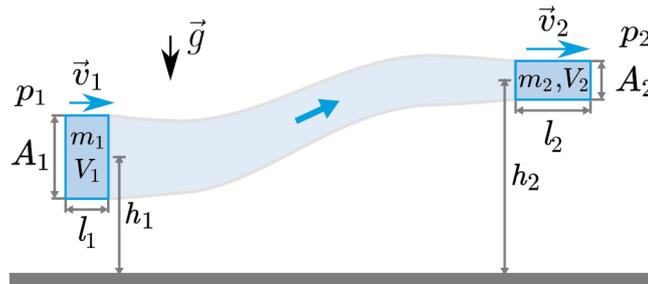


Abbildung 1.6: Model einer Stromröhre für Bernoulli-Gleichung

Auf der linken Seite gilt für das Volumen, was in die Stromröhre geleitet wird, der Zusammenhang $V_1 = A_1 l_1$ bzw. „Querschnitt mal Länge“. Die Kraft auf das Fluid ist durch den Druck auf der Fläche bekannt und lautet $F_1 = p_1 A_1$. Daraus folgt über Kraft und Weglänge des Schiebevorgangs für die am Fluidpaket geleistete Arbeit direkt $W_1 = F_1 l_1$.

Diese drei Formeln gelten auch rechts, weil im Fall eines inkompressiblen Fluids Massenerhaltung und zusätzlich Volumenerhaltung gilt. Das zeigt bereits die Kontinuitätsgleichung für eine stationäre Strömung bezogen auf Massen- und Volumenstrom.

Die aufgebrachte Arbeit auf der linken und rechten Seite ist in diesem Fall nicht identisch, da sich der Verlauf der kinetischen und potentiellen Energie bei der Bilanz aufschlägt. Die Volumina der Fluidpakete an den beiden Enden des Schlauchs sind aufgrund der Kontinuitätsgleichungen gleich groß.

$$\underbrace{\Delta E}_{\text{Differenz Gesamtenergie}} = \underbrace{mg(h_2 - h_1)}_{\text{Differenz kin. Energie}} + \underbrace{\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)}_{\text{Differenz pot. Energie}}$$

$$\underbrace{\Delta W}_{\text{Differenz geleist. Arbeit}} = F_1 l_1 - F_2 l_2 = p_1 \underbrace{A_1 l_1}_{V_1} - p_2 \underbrace{A_2 l_2}_{V_2} \stackrel{(V_1=V_2=V)}{=} (p_1 - p_2) V$$

Insgesamt stellen beide Gleichungen dar, dass eine Änderung von potentieller und kinetischer Energie des Fluidpakets durch die Druckdifferenz auf beiden Seiten herbeigeführt wird. Daher kann man eine Energiebilanz $\Delta E = \Delta W$ aufstellen, bei der Masse $m = \rho V$ gilt.

$$\begin{aligned}
(p_1 - p_2)V &= mg(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \quad | \quad m = \rho V \\
(p_1 - p_2)V &= \rho Vg(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\rho V(v_2^2 - v_1^2) \\
(p_1 - p_2) &= \rho g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)
\end{aligned}$$

Bringt man die Variablen, den Indizes entsprechend, auf beide Seiten der Gleichung, ergibt dies die bereits bekannte Bernoulli-Gleichung für zwei Punkte einer Stromröhre. Die Terme sind in dieser Darstellung nicht weiter durch die Dichte ρ geteilt, wie es in der Energiegleichung mit den spezifischen Energien als Terme der Fall ist.

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Diese Form entspricht einer Druckgleichung. Die Koordinate h wird oft als z bezeichnet, da man den Nullpunkt für eine Bilanz beliebig festlegen kann. Dies vereinfacht aufgrund des wegfallenden Terms die Berechnung, da sich die Höhendifferenz damit direkt in einer Koordinate widerspiegelt. Vor allem ist der Schweredruck in der Gleichung eine konstante Größe, wenn sich die Höhenkoordinaten zeitlich nicht ändern.

2.4.1 Alternativformen der Bernoulli-Gleichung

Die bereits gezeigte Bernoulli'sche Gleichung enthält als Terme spezifische Energien, aber in der Praxis ist es hilfreich, die Terme in eine andere Einheit umzuformen. Teilt man die Gleichung $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{konst.}$ beim reibungsfreien Fall durch die Erdbeschleunigung g , so erhält man die sogenannte Höhengleichung [3]. In dieser umgeformten Gleichung sind alle Summanden in der SI-Einheit „m“, dabei gilt:

$$\underbrace{h}_{\text{Energiehöhe}} = \underbrace{\frac{v^2}{2g}}_{\text{Geschwindigkeitshöhe}} + \underbrace{\frac{p}{\rho g}}_{\text{Druckhöhe}} + \underbrace{z}_{\text{geodätische Höhe}} = \text{konst.}$$

Summe der Höhenterme für eine Stromlinie	Fallhöhe im freien Fall für Endgeschwindigkeit v	Fluidhöhe über aktuellen Punkt für Schweredruck p	Höhenlage des aktuellen Punkts bezogen auf einen Nullpunkt z_0
--	--	---	--

Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass nun die Höhe in der Stromröhre direkt als eigener Term auftaucht. Beim Aufstellen der Bilanzgleichung kann man diese auf eine Seite der Gleichung bringen und als Höhendifferenzen Δh (z. B. $\Delta h_1 = z_1 - z_2$) zusammenfassen.

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \quad | - z_2$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + \Delta h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}$$

Eine weitere Umformung der Bernoulli-Gleichung erhält man, wenn man die Energiegleichung mit der Dichte ρ multipliziert. Das gleiche Ergebnis erhält man mit der Höhengleichung mal Wichte ρg , wobei die sogenannte Wichte dem Verhältnis aus Gewichtskraft zum Volumen eines Fluidpakets entspricht und auch „spezifisches Gewicht“ bezeichnet wird.

$$\underbrace{p_t}_{\text{Totaldruck}} = \underbrace{\frac{\rho}{2} v^2}_{\text{Dynamischer Druck}} + \underbrace{p}_{\text{Statischer Druck}} + \underbrace{\rho g z}_{(\dots)} = \text{konst.}$$

Summe der Druckterme, SI-Einheit Pa	wie eine kinetische Energie, bewirkt bei Bremsung eine Druckerhöhung	Summe aus Schweredruck und Betriebsdruck	Druckerhöhung bei Neigung, entspricht hydrostatischen Druck
-------------------------------------	--	--	---

Eine wichtige Tatsache ist, dass eine Drucksonde, mittig positioniert am gewählten Punkt einer Stromröhre, nur den statischen Druck p_{stat} misst. Also wirkt auf ein Fluidpaket dort auch nur dieser Druck und kann eine Kraft auf dieses ausüben. Trotzdem kann man den Totaldruck p_t und auch den dynamischen Druck $p_{\text{dyn}} = \frac{\rho}{2} v^2$ direkt messen, indem man beispielsweise den Differenzdruck mit einem anderen Bezugspunkt bestimmt.

Für die Messung des dynamischen Drucks wird eine Rohröffnung (A) in die Stromröhre so positioniert, dass es parallel zur Strömung liegt. Genau dann würde die Strömung in dieser Messröhre vollständig abgebremst werden und zu einer wirksamen Druckerhöhung führen. Da an dieser Stelle auch der statische Druck wirkt, setzt man die andere Seite (B) der Messröhre senkrecht zur Außenwand der Stromröhre.

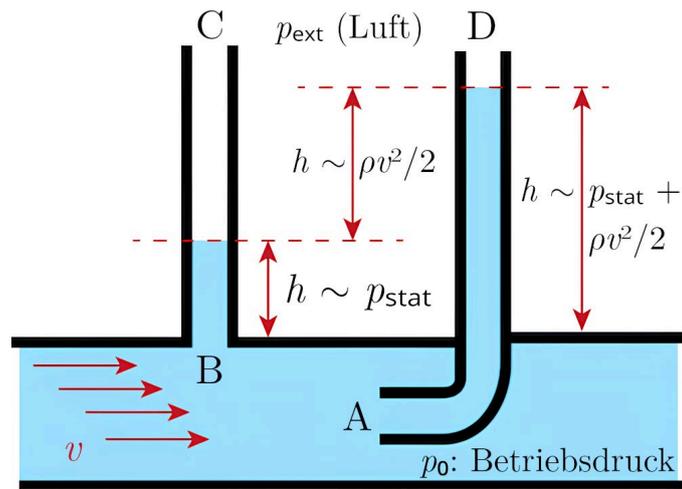


Abbildung 1.7: Statischer und dynamischer Druck im Rohr

Die Strömung fließt dort parallel an der Rohröffnung (B) der Messsonde vorbei und nur der statische Druck ist wirksam. In den beiden Messröhren steigt die Flüssigkeitssäule auf eine bestimmte Höhe, welche in einen Druck umgerechnet werden kann. Der Betriebsdruck p_0 liegt an beiden Öffnungen der Säulen bei (C) und (D) und wirkt sich somit nicht auf die Höhendifferenz beider Füllständen aus. Als Betriebsdruck bei Höhe $h = 0$ definiert, ist dieser Wert im statischen Druck bereits enthalten. Die Füllhöhe der Röhre kann Aufschluss über den statischen Druck geben. Für die Druckwerte an den Stellen (A), (B) gilt:

$$p_A = p_{\text{stat}} + p_{\text{dyn}},$$

$$p_B = p_{\text{stat}}$$

Für den hydrostatischen Druck an der Unterseite eines senkrechten Füllrohres gilt abhängig von der Füllhöhe

$$p_{\text{stat}}(h) = \rho gh + p_{\text{ext}}$$

Der statische Druck in der Rohrleitung, welcher an der Stelle (B) über den Füllstand indirekt gemessen werden, setzt sich aus dem hydrostatischen Druck einen Höhenunterschied und dem Betriebsdruck p_0 zusammen. Der Betriebsdruck ist definiert als der Druck, welcher an der Bezugshöhe $h = 0$ wirksam ist, auch bei ruhender Strömung und ohne Höhenunterschied. In der Hydraulik ist es üblicherweise der Luftdruck, wenn das System nicht vollständig geschlossen ist. Über Pumpen gelangt auch immer etwas Luft ins hydraulische System, da sich diese nicht Vakuum befinden. Gleichsetzen vom statischen Druck in der Rohrleitung und hydrostatischen Druck durch den Füllstand ergibt

$$p_{\text{stat}} = \rho gh + p_{\text{ext}} \stackrel{(p_0=p_{\text{ext}})}{=} \rho gh + p_0$$

Bei der Messung der Druckdifferenz zwischen (A) und (B) mittels Manometer würde sich der statische Druck direkt aufheben. Daher dürfen die Öffnungen (C) und (D) verbunden werden, um den dynamischen Druck direkt messen zu können. Dieses Prinzip wird beim Prandtl'sches Staurohr genutzt, auch bekannt als Prandtlsonde [3], und ist industriell als fertige Messsonde erhältlich. In der Luftfahrt, bei denen mit kompressiblen Gasen gerechnet wird, kann damit die Luftgeschwindigkeit berechnet werden. Für fluidtechnische Anwendungen sind bestimmte Sonden auch in der Lage, den statischen Druck bestimmen.

2.4.2 Verlustbehaftete Bernoulli-Gleichung

Um Reibungsverluste in einer Rohrleitung bei der Energiebilanz zu berücksichtigen, muss die Bernoulli-Gleichung, welche nur für reibungsfreie, inkompressible Fluide gilt, um Reibungsterme erweitert werden. Es ist bereits bekannt, dass für den Druckverlust gilt

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} v^2$$

Einen Druckverlust kann man mithilfe der Dichte und Erdbeschleunigung auch in eine äquivalente Höhendifferenz umrechnen, welche einen hydrostatischen Druck bewirkt.

$$\Delta p = (\rho g) \Delta h$$

Die Einheitenrechnung bestätigt den Zusammenhang.

$$[\Delta p] = [\rho][g][\Delta h] = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{m} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{Pa}$$

Teilt man die Gleichung für den Druckverlust auf beiden Seiten durch ρg , ändert sich nur die Einheit in Meter. Das Ergebnis wird auch als „Höhenverlust“ h_f bezeichnet und entspricht dem Druckverlust durch Reibung, der dem hydrostatischen Druck bei einer Höhendifferenz von $h_f = \Delta h$ entspricht.

$$h_f = \Delta h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

Der Reibungsfaktor λ und die Leitungslänge l sind damit neue Größen, die in der erweiterten Bernoulli-Gleichung vorkommen. Innerhalb der Stromröhre werden Reibungsverluste

berücksichtigt, welche aufgrund von Reibung durch Unebenheiten der Rohrwand auftreten. Ist der Durchmesser über der Stromröhre annähernd konstant, gilt die Druckverlustgleichung für eine gerade Rohrleitung.

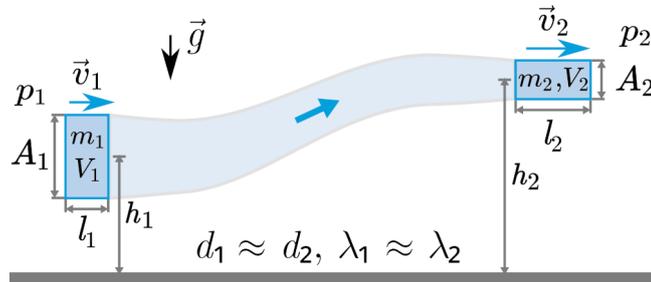


Abbildung 1.8: Modell einer Stromröhre

Die bereits bekannte Bernoulli-Gleichung für den reibungsfreien Fall wird um den Reibungsterm, welcher einem Höhenverlust entspricht, erweitert. In der Energiebilanz treten die Verluste durch Reibung auf, wenn das Fluid durch das Rohr strömt. Daher muss man auf der linken Seite die Reibungsverluste abziehen, da diese Reibungsarbeit am Fluid leisten und somit der Strömung Energie entziehen. Damit wird das negative Vorzeichen erklärt.

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_1 - \underbrace{\lambda \frac{l}{d} \frac{v_2^2}{2g}}_{h_f = \frac{\Delta p_v}{\rho g}} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_2$$

In dieser Form sind die Einheiten der einzelnen Terme in Meter. Die Druckgleichung erhält man, wenn auf beiden Seiten mit ρg multipliziert wird. Die Druckverluste durch Rohrreibung Δp_v tauchen damit direkt als Term auf.

$$\frac{\rho}{2} v_1^2 + p_1 + \rho g h_1 - \underbrace{\lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} v_2^2}_{\Delta p_v} = \frac{\rho}{2} v_2^2 + p_2 + \rho g h_2$$

Mithilfe der Bernoulli-Gleichungen können die Strömungsgeschwindigkeiten und Druckwerte an einer Rohrleitung berechnet werden.

2.5 Knotenverknüpfung zweier Rohrleitungen

Bisher wurden die Bernoulli-Gleichungen anhand einer Stromröhre gezeigt, in der sich der Querschnitt im Ortsverlauf ändern kann. Nun wird der Fall behandelt, bei dem zwei

Rohrleitungen mit jeweils konstantem Querschnitt miteinander verbunden werden. Beide Rohre können außerdem unterschiedliche absolute Rauheiten k aufweisen.



Abbildung 1.9: Modell einer Knotenverbindung

Für beide Rohre können verlustbehaftete Bernoulli-Gleichungen aufgestellt werden. Bei Punkt A fließt das Fluid mit dem Volumenstrom Q_i hinein, und schließlich bei Punkt D als Q_o wieder hinaus. An den Stellen A, B, C und D wird die Strömungsgeschwindigkeit beim Ein- und Austritt am Rohr mit v_A, \dots, v_D bezeichnet. Diese Stellen liegen dabei auf den Höhen h_A, \dots, h_D auf und dort wirken die Drücke p_A, \dots, p_D . Die Vorzeichen der Geschwindigkeiten v_A, \dots, v_D werden so definiert, dass sie entlang der Strömungsrichtung positiv. In welcher Richtung man die Strömung annimmt, ist frei wählbar, solange die Vorzeichenkonvention einheitlich bleibt. Die Bilanzgleichungen lauten nach der Bernoulli-Gleichung:

$$\begin{aligned} \text{Rohr 1: } & \frac{\rho}{2} v_A^2 + p_A + \rho g h_A - \lambda_1 \frac{l}{d_1} \frac{\rho}{2} v_A^2 = \frac{\rho}{2} v_B^2 + p_B + \rho g h_B, \\ \text{Rohr 2: } & \frac{\rho}{2} v_C^2 + p_C + \rho g h_C - \lambda_2 \frac{l}{d_2} \frac{\rho}{2} v_C^2 = \frac{\rho}{2} v_D^2 + p_D + \rho g h_D \end{aligned}$$

Der Knoten weist keinen Höhenunterschied oder Reibungsverluste auf, daher gelten für die Höhen $h_C = h_D$ und Druckgrößen $p_C = p_D$. Beide Leitungen werden also direkt durch den Knoten mit der Höhe $h_{\text{node}} = h_C = h_D$ verbunden, wobei am Knoten der Druck $p_{\text{node}} = p_C = p_D$ gilt. Fasst man die Terme zusammen und bringt den Reibungsterm auf die rechte Seite einer Gleichung, wird die Struktur deutlicher.

$$\begin{aligned} \text{Rohr 1: } & \frac{\rho}{2} (v_A^2 - v_B^2) + \underbrace{(p_A - p_B)}_{\substack{\text{Druckdifferenz} \\ \text{Rohr 1}}} + \rho g \underbrace{(h_A - h_B)}_{\substack{\text{Höhendifferenz} \\ \text{Rohr 1}}} = \lambda_1 \frac{l}{d_1} \frac{\rho}{2} v_A^2, \\ \text{Rohr 2: } & \frac{\rho}{2} (v_C^2 - v_D^2) + \underbrace{(p_C - p_D)}_{\substack{\text{Druckdifferenz} \\ \text{Rohr 2}}} + \rho g \underbrace{(h_C - h_D)}_{\substack{\text{Höhendifferenz} \\ \text{Rohr 2}}} = \lambda_2 \frac{l}{d_2} \frac{\rho}{2} v_C^2 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich weiter, da die Strömungsgeschwindigkeit bei einem Rohr mit konstantem Querschnitt an beiden Seiten gleich groß ist. Dann gilt wegen der Gleichheit der Geschwindigkeitsbeträge $|v_A| = |v_B|$, $|v_C| = |v_D|$ folglich auch, dass die

Klammerausdrücke $(v_A^2 - v_B^2) = 0$ und $(v_C^2 - v_D^2) = 0$ sind. Damit fällt der jeweils linke Terme, welcher dem dynamischen Druck entspricht, in der Bilanz weg.

Es bietet sich an, die Richtungen \overline{AB} bzw. \overline{CD} als Vorgabe für das Vorzeichen der Strömungsgeschwindigkeit zu nehmen. Beim Reibungsverlust muss zusätzlich beachtet werden, dass das Vorzeichen der Strömungsgeschwindigkeit einbezogen wird. Die Lösung der Gleichung nach Druck und Geschwindigkeit wäre sonst für eine rückwärts fließende Strömung nicht eindeutig lösbar.

$$\begin{aligned} \text{Rohr 1: } & \underbrace{(p_A - p_B)}_{\substack{\text{Druckdifferenz} \\ \text{Rohr 1}}} + \rho g \underbrace{(h_A - h_B)}_{\substack{\text{Höhendifferenz} \\ \text{Rohr 1}}} = \lambda_1 \frac{l}{d_1} \frac{\rho}{2} v_1^2 \operatorname{sgn}(v_1), \quad v_1 = v_{AB} \\ \text{Rohr 2: } & \underbrace{(p_C - p_D)}_{\substack{\text{Druckdifferenz} \\ \text{Rohr 2}}} + \rho g \underbrace{(h_C - h_D)}_{\substack{\text{Höhendifferenz} \\ \text{Rohr 2}}} = \lambda_2 \frac{l}{d_2} \frac{\rho}{2} v_2^2 \operatorname{sgn}(v_2), \quad v_2 = v_{CD} \end{aligned}$$

2.6 Beispielrechnung

Rohr 1 hat einen Durchmesser $d_1 = 0,1 \text{ m}$ und damit wegen $A = \frac{\pi}{4} d^2$ einen kreisrunden Querschnitt $A_1 = 7,854 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Das zweite Rohr ist mit $d_2 = 0,025 \text{ m}$ dünner, was einen Querschnitt von $A_2 = 4,9087 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ergibt. Außerdem ist wegen $Q_i = 0,0125 \text{ m}^3/\text{s}$ auch bekannt, dass für die Volumenströme im Rohr $Q_1 = Q_2 = 0,0125 \text{ m}^3/\text{s}$ und damit für die Strömungsgeschwindigkeiten wegen $v = Q/A$ gilt:

$$v_1 = \frac{0,0125}{A_1} = 1,5915 \text{ m/s}, \quad v_2 = \frac{0,0125}{A_2} = 25,465 \text{ m/s}$$

Mithilfe der Strömungsgeschwindigkeiten lassen sich die Reynoldszahlen berechnen. Die dynamische Viskosität η beträgt bei Wasser und Raumtemperatur von $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ungefähr $1,0 \text{ mPa s}$, man erhält schließlich:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}_1 &= \frac{\rho v_1 d_1}{\eta} = \frac{997 \text{ kg/m}^3 \cdot 1,5915 \text{ m/s} \cdot 0,1 \text{ m}}{1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}} \approx 1,587 \cdot 10^5 \\ \operatorname{Re}_2 &= \frac{\rho v_2 d_2}{\eta} = \frac{997 \text{ kg/m}^3 \cdot 25,465 \text{ m/s} \cdot 0,025 \text{ m}}{1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}} \approx 6,347 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

Die dynamische Viskosität η beträgt bei Wasser und Raumtemperatur von $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ungefähr $1,0 \text{ mPa s}$. Die Strömungen in beiden Rohren liegen damit im turbulenten Bereich mit einer Reynoldszahl von $\operatorname{Re} > 4000$.

Laut dem Moody-Diagramm ergibt dies mit einer relativen Rauheit von 10^{-3} einen Reibungsfaktor von ungefähr 0,02 für beide Rohre. Mithilfe der Haaland-Gleichungen können die Reibungsfaktoren genauer berechnet werden.

$$\lambda_1 = (-1,8)^{-2} \left[\log_{10} \left(\left(\frac{1}{3,7} \frac{\varepsilon_1}{d_1} \right)^{1,11} + \frac{6,9}{\text{Re}_1} \right) \right]^{-2} = \frac{25}{81} \cdot \left[\log_{10} \left(\left(\frac{10^{-3}}{3,7} \right)^{1,11} + \frac{6,9}{1,587 \cdot 10^5} \right) \right]^{-2}$$

$$\lambda_1 \approx 0,0212$$

$$\lambda_2 = (-1,8)^{-2} \left[\log_{10} \left(\left(\frac{1}{3,7} \frac{\varepsilon_2}{d_2} \right)^{1,11} + \frac{6,9}{\text{Re}_2} \right) \right]^{-2} = \frac{25}{81} \cdot \left[\log_{10} \left(\left(\frac{10^{-3}}{3,7} \right)^{1,11} + \frac{6,9}{6,347 \cdot 10^5} \right) \right]^{-2}$$

$$\lambda_2 \approx 0,02009$$

Als Randbedingung gilt, dass der Druck am Auslass $p_D = 0$ und die Höhe an dieser Stelle $h_D = 0$ ist. Somit vereinfachen sich die beiden Druckgleichungen zu

$$(p_A - p_B) + \rho g (h_A - h_B) = \lambda_1 \frac{l}{d_1} \frac{\rho}{2} v_1^2 \text{sgn}(v_1)$$

$$p_C + \rho g h_C = \lambda_2 \frac{l}{d_2} \frac{\rho}{2} v_2^2 \text{sgn}(v_2)$$

Der Druck p_C kann somit direkt berechnet werden zu

$$p_C = 0,02009 \frac{l}{d_2} \frac{\rho}{2} v_2^2 \text{sgn}(v_2) - \rho g h_C$$

$$= 0,02009 \frac{10 \text{ m}}{0,025 \text{ m}} \frac{997 \text{ kg}}{2 \text{ m}^3} \left(25,465 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - 997 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (-20 \text{ m})$$

$$\approx (25,9772 + 1,9561) \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\approx 27,933 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Für den Druck p_A gilt nach Umstellen der ersten Gleichung und Einsetzen von p_C

$$p_A = 0,0212 \frac{l}{d_1} \frac{\rho}{2} v_1^2 \text{sgn}(v_1) - \rho g (h_A - h_B) + p_B$$

$$= 0,0212 \frac{10 \text{ m}}{0,1 \text{ m}} \frac{997 \text{ kg}}{2 \text{ m}^3} \left(1,5915 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - 997 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (10 + 20) \text{ m} + 27,933 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\approx (0,026768 - 2,9342 + 27,933) \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

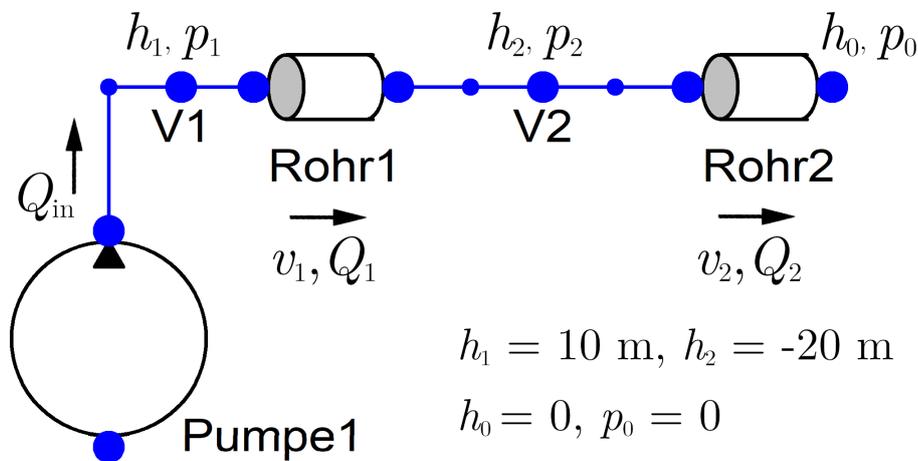
$$\approx 25,026 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Sind die Volumenströme in den Röhren wie in diesem einfachen Beispiel bekannt, können die Drücke an den Rohren direkt berechnet werden. Mit der Beziehung $10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$ kann man die Druckwerte auch in Atmosphärendruck angeben.

3 Modellierung des Systems

3.1 System mit Knotenverbindung

Für eine numerische Berechnung wird das Gleichungssystem von zwei Rohren und einer Knotenverbindung so aufgestellt, dass dieses gelöst werden kann. Die Volumenströme durch beide Rohre sind in der numerischen Berechnung zwei Unbekannte des Systems, daher benötigt man für dieses System neben der Knotenverbindung (V2) einen weiteren Knoten (V1) am Pumpeneinlass. Die Höhenlagen der Knoten sind abgebildet.



3.1.1 Aufbau von Druck- und Knotengleichungen

Die Druckgleichungen aus dem vorherigen Kapitel werden nach Null umgestellt. Außerdem wird das Quadrat des Volumenstroms so ersetzt, dass das Vorzeichen berücksichtigt werden kann. Für positive Volumenströme bleibt das Vorzeichen des Reibungsterm ($\lambda_i \dots$) unverändert.

$$\text{Rohr 1:} \quad (p_1 - p_2) + \rho g (h_1 - h_2) - \lambda_1 \frac{l}{d_1} \frac{\rho}{2} \frac{1}{A_1^2} |Q_1| Q_1 = 0$$

$$\text{Rohr 2:} \quad (p_2 - p_0) + \rho g (h_2 - h_0) - \lambda_2 \frac{l}{d_2} \frac{\rho}{2} \frac{1}{A_2^2} |Q_2| Q_2 = 0$$

Es gibt insgesamt vier Variablen, bestehend aus zwei Druckgrößen und zwei Volumenströmen. Daher fehlen noch zwei Gleichungen für ein vollständig bestimmtes System. Neben Knotenbilanz zwischen beiden Rohren benötigt man noch die Bilanz zwischen Pumpe und Rohr 1 als eigene Gleichung. Dies ergibt zwei einfache Knotengleichungen.

$$\text{Knoten 1: } Q_{\text{in}} - Q_1 = 0$$

$$\text{Knoten 2: } Q_1 - Q_2 = 0$$

Die Struktur des Gleichungssystems entspricht also den Druck- und Knotengleichungen.

$$\begin{array}{ll} f_1(Q_1, Q_2, p_1, p_2) = 0 & g_1(Q_1, Q_2, p_1, p_2) = 0 \\ \underbrace{f_2(Q_1, Q_2, p_1, p_2) = 0}_{\text{Druckgleichungen}} & \underbrace{g_2(Q_1, Q_2, p_1, p_2) = 0}_{\text{Knotengleichungen}} \end{array}$$

Die Variablen können somit als Vektor in jede Funktion eingesetzt werden. Die Gleichungen $f_i(x) = 0$, $g_j(x) = 0$ mit $i = j = 1:n$ werden als Vektorgleichung $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ zusammenfassen.

3.1.2 Newton-Verfahren im Mehrdimensionalen

Es wird ein mehrdimensionales Lösungsverfahren benötigt, weil die Gleichungen von mehreren Variablen abhängen. Die Anzahl an Gleichungen entspricht der Menge an Variablen. Der Newtonschritt im Mehrdimensionalen ist definiert als [15]:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_n), \quad \text{mit } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_n = (Q_1, Q_2, p_1, p_2)$$

In den Zeilen der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\mathbf{x}_n)$ liegen die Gradienten der einzelnen Funktionen. Dieses Verfahren ähnelt sehr dem linear konvergierenden Fixpunktverfahren [16], bei dem statt der Nullstelle einer mehrdimensionalen Funktion ein Fixpunkt x gesucht wird. Jedoch ist die Konvergenz lokal mindestens linear, im besten Fall sogar quadratisch.

Zur Vermeidung der oft aufwendig zu berechnenden Inversen der Matrix wird ein lineares Gleichungssystem gelöst.

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_n) \cdot \Delta \mathbf{x}_{n+1} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_n), \quad \Delta \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n$$

3.1.3 Aufbau der Jacobi-Matrix

Die Jacobi-Matrix beinhalten die ersten partiellen Ableitungen des Gleichungssystems. Jede Spalte entspricht einer Variablen, nach der partiell abgeleitet wird. Jede Zeile steht für eine Gleichung des Systems. Zuerst werden die Untermatrizen der Jacobi-Matrix aufgestellt.

$$\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_1 \rho l}{A_1^2 d_1} |Q_1| & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_2 \rho l}{A_2^2 d_2} |Q_2| \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \frac{\partial f_2}{\partial p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial g_1}{\partial Q_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial Q_1} & \frac{\partial g_2}{\partial Q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial p_1} & \frac{\partial g_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial p_1} & \frac{\partial g_2}{\partial p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nur die Untermatrix \mathbf{J}_{11} hängt von den Variablen ab, genauer gesagt vom Betrag des Volumenstroms. Die anderen Matrizen sind konstant.

3.1.4 Implementierung in GNU Octave

In Octave, welches als Open-Source Alternative zu Matlab dient, wird zuerst die Funktion implementiert. Hier wird auch die Dichte „rho“, Erdbeschleunigung „g“ und dynamische Viskosität „eta“ definiert. Die Knotenhöhen und Rohrdurchmesser werden als Vektor definiert. Die Rohrlänge ist in diesem Fall überall gleich und daher kein Vektor.

```
function [F, J] = fun1 (x, qi)
% Initialisierung Funktionsvektor
F = 0 * x;

% Parameter (Einheit kg/m³, m/s², Pa s)
rho = 997;
g = 9.81;
eta = 1e-3;

% Geometrie (Einheit m)
l = 10;
h = [10, -20];
d = [0.1, 0.025];

% Rohrquerschnitt
A = pi/4 * d.^2;

% relative Rauheit k/d
rel = 1e-3;

% Randbedingung (Pa) und Höhe (m) am Auslass
p0 = 0;
h0 = 0;

% Anzahl Rohre und Knoten
Np = length(d);
Nn = length(h);

% Volumenströme (m³/s) und Drücke (Pa) aus Vektor extrahieren
```

```

q = x(1:Np)';
p = x(Np+1:end)';

% Strömungsgeschwindigkeit (m/s) berechnen
v = q ./ A;

% Reynoldszahl berechnen
Re = rho * abs(v) .* d / eta;

% Haaland-Gleichung in zwei Schritte
lambda_inv_root = -1.8 * log10( (rel/3.7).^1.11 + 6.9./Re );
lambda = (1./lambda_inv_root) .^2;

%% Aufstellen der Druckgleichungen für jedes Rohr
Dp = [p(1) - p(2), p(2) - p0]; % Druckbilanzen
Dh = [h(1) - h(2), h(2) - h0]; % Höhenbilanzen

% Bernoulli: Zusammensetzung mit Reibungsverlusten
F(1:Np) = Dp + rho * g * Dh;
F(1:Np) -= ( lambda .* l./d * rho/2 .* (1./A).^2 .* abs(q) .* q )';

%% Aufstellen der Knotenbilanzen für jeden Knoten
F(Np+1:end) = [qi - q(1);
               q(1) - q(2)];

%% Aufstellen der Jacobi-Matrix
J11 = diag( -lambda .* l./d * rho .* (1./A).^2 .* q .* sign(q) );

J12 = [1, -1;
       0,  1];

J21 = [-1, 0;
       1,-1];

J22 = zeros(Nn);

J = [J11, J12;
     J21, J22];
end

```

Im Hauptprogramm wird die Knoten- und Rohranzahl berechnet. Der Startvektor wird als Nullvektor initialisiert. Als Volumenstrom der Pumpe wird $q_i = 0,0125 \text{ m}^3/\text{s}$ definiert. In einer Schleife werden die Iterationen durchgeführt. Dabei dient eine Matrix X_V als Speicher der jeweils letzten vier Iterationen pro Schleifendurchlauf, wobei die Spalten die Vektoren $x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$ enthalten. Damit kann man die Konvergenzrate pro Iteration abschätzen.

$$r_i = \frac{\ln \left(\frac{\|x_{n+1} - x_n\|_2}{\|x_n - x_{n-1}\|_2} \right)}{\ln \left(\frac{\|x_n - x_{n-1}\|_2}{\|x_{n-1} - x_{n-2}\|_2} \right)}, \quad \text{euklidische Norm: } \|x_i\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

```

% Geometrie
l = 10;
h = [10, -20];
d = [0.1, 0.025];

% Rohrquerschnitt
A = pi/4 * d.^2;

% Anzahl der Rohre und Knoten
Npipes = length (d); Nnodes = length (h);

% Startvektor
x = zeros (Npipes + Nnodes,1);

% Pumpenvolumenstrom
qi = 0.0125;

% Befehlsfenster initialisieren
format shortG
clc,

% Speicherregister für 4 Werte initialisieren
xv = zeros(length(x),4);

% Maximal 100 Iterationen
for i = 1:100
    % Funktionswert und Jacobi-Matrix berechnen
    [fval, JAC] = fun1(x,qi);

    % Schiebe Werte im Speicherregister nach links
    xv(:,1:3) = xv(:,2:4);

    % Newtonschritt
    x = x - (JAC \ fval);

    % Neuen x-Wert im Speicherregister speichern
    xv(:,4) = x;

    % Ausgabe: Iterationsnummer und Funktionsnorm
    fprintf('Iteration: %i, Funktionsnorm = %g\n\n', i, norm (fval))

    % Strömungsgeschwindigkeit und Druck aus Vektor
    vc = x(1:Npipes)';
    pc = x(Npipes+1:end)';

    % Ausgabe: Volumenstrom m³/s in Geschwindigkeit m/s umrechnen
    fprintf(' v [m/s]:\n')
    fprintf('\t%9.3f\n', vc./A)

    % Ausgabe: Druck von Pa in bar umrechnen
    fprintf(' p [bar]:\n')
    fprintf('\t%9.3f\n', pc * 1e-5)

    % Konvergenzrate abschätzen und ausgeben
    if i > 3
        % Hilfsvariablen der Normverhältnisse
        tmp1 = norm ( xv(:,4) - xv(:,3) ) / norm( xv(:,3) - xv(:,2) );
        tmp2 = norm ( xv(:,3) - xv(:,2) ) / norm( xv(:,2) - xv(:,1) );

        if (tmp1 == 0) || (tmp2 == 0)
            % Rate ist undefiniert, wenn ein Term 0 ist
            rate = NaN;
        end
    end
end

```

```

else
    % Logarithmisches Verhältnis
    rate = log(tmp1) / log(tmp2);
end
fprintf('\nKonvergenzrate (geschätzt): %6.3f\n', rate)
endif

fprintf('-----\n')

% Abbruchkriterium für Funktionsnorm
if norm(fval) < 1e-6
    break
endif
end

```

In der Ausgabe sieht man die Ergebnisse der einzelnen Iterationsschritte. Es fällt auf, dass die Strömungsgeschwindigkeit bereits nach einem Iterationsschritt konvergiert ist. Nach drei Iterationsschritten sind auch die Druckgrößen konvergiert. Es gibt eine Warnung, dass die Matrix bezogen auf die Maschinengenauigkeit singular ist. Der „\“-Operator in Matlab und Octave funktioniert auch bei schlecht konditionierten Matrizen, bei denen eine direkte Berechnung der inversen Matrix Probleme bereiten würde. Also anstelle, dass eine inverse Matrix berechnet und dann mit einem Vektor multipliziert wird, wird intern ein äquivalentes Lösungssystem gelöst. Die Funktion „inv (...)“ ist eher dazu gedacht, wenn eine inverse Matrix explizit berechnet werden soll.

```

Iteration: 1, Funktionsnorm = 352643
v [m/s]:
    1.592
    25.465
p [bar]:
   -0.978
    1.956
-----
warning: matrix singular to machine precision, rcond = 2.89298e-18
warning: called from line 37 column 7

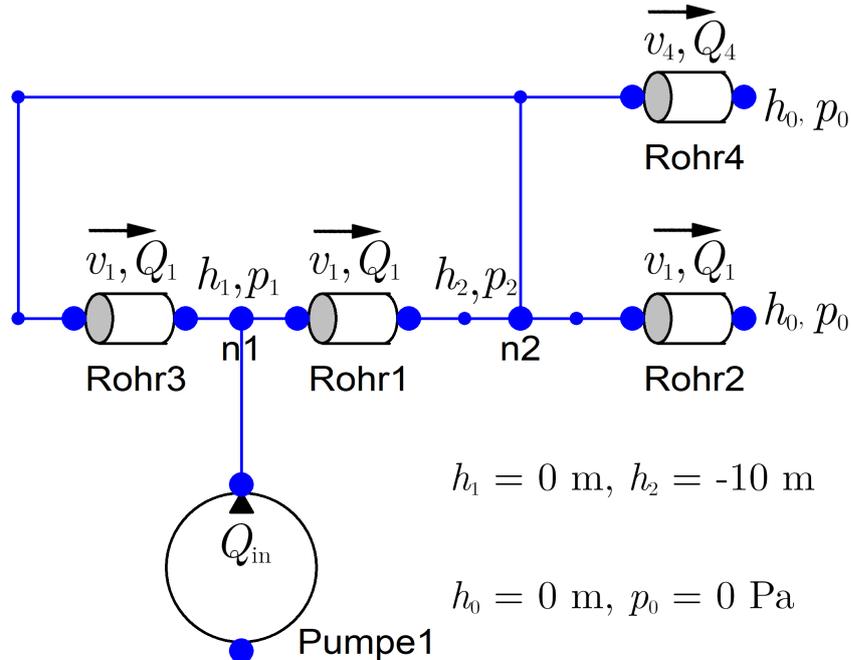
Iteration: 2, Funktionsnorm = 2.59765e+06
v [m/s]:
    1.592
    25.465
p [bar]:
   25.025
   27.933
-----
warning: matrix singular to machine precision, rcond = 2.89298e-18
warning: called from line 37 column 7

Iteration: 3, Funktionsnorm = 2.8053e-09
v [m/s]:
    1.592
    25.465
p [bar]:
   25.025
   27.933

```

3.2 System mit Knotenverzweigungen

In diesem Beispiel wird das erste System um zwei weitere Rohre erweitert. Die Anzahl der Knoten bleibt gleich, jedoch ist der Volumenstrom für jedes Rohr in diesem Fall unbekannt und kann nicht einfach per Hand berechnet werden.



3.2.1 Aufbau der Druck- und Knotengleichungen

Da nun vier Rohre vorhanden sind, werden vier Druckgleichungen aufgestellt. Anstelle, dass der Volumenstrom quadriert wird, muss dessen Betrag mit dem Volumenstrom multipliziert werden. Dadurch wird das Vorzeichen des Volumenstroms bei der Lösung des Systems berücksichtigt.

$$\text{Rohr 1: } (p_1 - p_2) + \rho g (h_1 - h_2) - \lambda_1 \frac{\rho}{2} \frac{l}{A_1^2 d_1} |Q_1| Q_1 = 0$$

$$\text{Rohr 2: } (p_2 - p_0) + \rho g (h_2 - h_0) - \lambda_2 \frac{\rho}{2} \frac{l}{A_2^2 d_2} |Q_2| Q_2 = 0$$

$$\text{Rohr 3: } (p_2 - p_1) + \rho g (h_2 - h_1) - \lambda_3 \frac{\rho}{2} \frac{l}{A_3^2 d_3} |Q_3| Q_3 = 0$$

$$\text{Rohr 4: } (p_2 - p_0) + \rho g (h_2 - h_0) - \lambda_4 \frac{\rho}{2} \frac{l}{A_4^2 d_4} |Q_4| Q_4 = 0$$

Für jeden Knoten werden die Volumenstrombilanzen aufgestellt. Wichtig ist, dass die Vorzeichenkonvention eingehalten wird. Die Strömungsrichtung in einem Rohr wird als positiv von Anschluss A nach B definiert. Fließt das Fluid von B nach A, wäre das Vorzeichen vom Volumenstrom daher negativ. Somit ist die Strömungsrichtung eindeutig festgelegt.

$$\begin{aligned} \text{Knoten 1:} \quad & Q_{\text{in}} - Q_1 + Q_3 = 0 \\ \text{Knoten 2:} \quad & Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4 = 0 \end{aligned}$$

Das System besteht somit aus $(4 + 2)$ Gleichungen und ist somit quadratisch. Die Anzahl der Unbekannten, in diesem Fall vier Volumenströme und zwei Druckgrößen, entspricht der Anzahl der Gleichungen.

$$\begin{aligned} f_1(Q_1, \dots, Q_4, p_1, p_2) &= 0 & g_1(Q_1, \dots, Q_4, p_1, p_2) &= 0 \\ f_2(Q_1, \dots, Q_4, p_1, p_2) &= 0 & g_2(Q_1, \dots, Q_4, p_1, p_2) &= 0 \\ &\vdots & &= 0 \\ f_4(Q_1, \dots, Q_4, p_1, p_2) &= 0 \end{aligned}$$

3.2.2 Aufbau der Jacobi-Matrix

Mithilfe der partiellen Ableitungen kann die Jacobi-Matrix aufgestellt werden. Zur Übersicht wird diese in vier Untermatrizen zerlegt. Werden die Druckgleichungen nach den Volumenströmen partiell abgeleitet, erhält man für J_{11} eine Diagonalmatrix.

$$\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial Q_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_4}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial f_4}{\partial Q_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \frac{\rho l}{A_1^2 d_1} |Q_1| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \frac{\rho l}{A_2^2 d_2} |Q_2| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \frac{\rho l}{A_3^2 d_3} |Q_3| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 \frac{\rho l}{A_4^2 d_4} |Q_4| \end{bmatrix}$$

Die Matrix J_{11} hat die Besonderheit, dass diese von den Beträgen der Volumenströme abhängt, daher nicht konstant ist.

Die Untermatrix J_{12} besteht nur aus konstanten Werten und beinhaltet als Information die Vorzeichen der Druckdifferenzen $(p_1 + p_2)$ zu jedem Rohr. Das bedeutet, dass jede Zeile für eine Druckgleichung steht, wobei der Spaltenwert ein Faktor vor p_1 und p_2 ist.

$$\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_4}{\partial p_1} & \frac{\partial f_4}{\partial p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Knotenbilanzen ohne Pumpenstrom tauchen in Untermatrix \mathbf{J}_{21} direkt auf. Dabei steht jede Zeile für einen Knoten und die Spaltenwerte entsprechen dem Vorfaktor des Volumensstroms. Die Untermatrix \mathbf{J}_{22} ist eine Nullmatrix, da in den Knotenbilanzen keine Drücke auftauchen.

$$\mathbf{J}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial Q_4} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial g_2} & \dots & \frac{\partial Q_4}{\partial g_2} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial Q_4}{\partial Q_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial p_1} & \frac{\partial g_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial p_1} & \frac{\partial g_2}{\partial p_2} \\ \frac{\partial p_1}{\partial p_1} & \frac{\partial p_2}{\partial p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2.3 Implementierung in GNU-Octave

```
function [F, J] = fun2 (x, qi)
...
%% Aufstellen der Jacobi-Matrix

% J11: Diagonalmatrix
J11 = diag( -lambda .* l./d * rho .* (1./A).^2 .* abs(q) );

% J21: entspricht Druckdifferenzmatrix
J12 = [1, -1;
        0, 1;
        -1, 1;
        0, 1];

% J21: entspricht Knotenmatrix
J21 = [-1, 0, 1, 0;
        1, -1, -1, -1];

% J22: Nullmatrix
J22 = zeros(Nn);

% Zusammensetzung der gesamten Jacobi-Matrix
J = [J11, J12;
     J21, J22];
end
```

3.3 Konvergenzrate

3.3.1 Formel für einen Iterationsschritt

Wie bereits gezeigt lautet der Newtonschritt für eine Iteration:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{J}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = (Q_1, \dots, Q_4, p_1, p_2)$$

Weil die Lösung erst am Ende einer Simulation bekannt ist, muss zuerst die Konvergenzrate geschätzt werden. Dies ist mit der folgenden Formel [17] möglich

$$r_i(\mathbf{x}_i) \approx \frac{\ln \left(\frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|x_n - x_{n-1}\|} \right)}{\ln \left(\frac{\|x_n - x_s\|}{\|x_{n-1} - x_{n-2}\|} \right)}, \quad \mathbf{x}_i = (x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1})$$

Ist die numerische Lösung aus einem vorherigen Simulationslauf bereits bekannt, kann die Konvergenzrate auch genauer berechnet werden. Es werden pro Schritt die jeweils letzten drei Iterationen benötigt. Mithilfe der folgenden Formel lautet die Konvergenzrate nun

$$r_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_s) = \frac{\ln \left(\frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|} \right)}{\ln \left(\frac{\|e_n\|}{\|e_{n-1}\|} \right)} = \frac{\ln \left(\frac{\|x_{n+1} - x_s\|}{\|x_n - x_s\|} \right)}{\ln \left(\frac{\|x_n - x_s\|}{\|x_{n-1} - x_s\|} \right)}, \quad \mathbf{x}_i = (x_{n-1}, x_n, x_{n+1}), \quad \mathbf{x}_s: \text{Lösung}$$

3.3.2 Konvergenzverhalten

In der Ausgabe kann ab der vierten Iteration sehen, dass die Konvergenzrate sogar größer als 1 ist. Die Lösung konvergiert also schneller als linear. Ab der siebten Iteration sinkt die Konvergenzrate wieder auf ungefähr 1.

```
warning: matrix singular to machine precision
warning: called from line 73 column 7
```

```
Iteration: 1, Funktionsnorm = 195611
```

```
v [m/s]:
    0.796
   12.732
```

```

-0.199
3.183
p [bar]:
-0.000
0.978
-----
Iteration: 2, Funktionsnorm = 662386

v [m/s]:
0.424
6.765
-0.292
4.675
p [bar]:
0.415
1.393
-----
Iteration: 3, Funktionsnorm = 151298

v [m/s]:
0.273
4.379
-0.330
5.272
p [bar]:
0.568
1.546
-----
Iteration: 4, Funktionsnorm = 26588.7

v [m/s]:
0.230
3.777
-0.340
5.422
p [bar]:
0.605
1.582

Konvergenzrate (geschätzt):      1.450 (v), 1.450 (p)
Konvergenzrate (Lösung bekannt): 1.414 (v), 1.414 (p)
-----
Iteration: 5, Funktionsnorm = 2392.74

v [m/s]:
0.223
3.715
-0.342
5.438
p [bar]:
0.608
1.586

Konvergenzrate (geschätzt):      1.522 (v), 1.522 (p)
Konvergenzrate (Lösung bekannt): 1.176 (v), 1.176 (p)
-----
Iteration: 6, Funktionsnorm = 112.042

v [m/s]:
0.222
3.712
-0.342

```

```

p [bar]:      5.438
              0.608
              1.586

Konvergenzrate (geschätzt):      1.202 (v), 1.202 (p)
Konvergenzrate (Lösung bekannt): 1.009 (v), 1.009 (p)
-----
Iteration: 7, Funktionsnorm = 4.82828

v [m/s]:
          0.222
          3.711
         -0.342
          5.438

p [bar]:
          0.608
          1.586

Konvergenzrate (geschätzt):      1.010 (v), 1.010 (p)
Konvergenzrate (Lösung bekannt): 0.995 (v), 0.995 (p)
-----
Iteration: 8, Funktionsnorm = 0.209182

v [m/s]:
          0.222
          3.711
         -0.342
          5.438

p [bar]:
          0.608
          1.586

Konvergenzrate (geschätzt):      0.995 (v), 0.995 (p)
Konvergenzrate (Lösung bekannt): 0.998 (v), 0.998 (p)
-----
Iteration: 9, Funktionsnorm = 0.00906941

v [m/s]:
          0.222
          3.711
         -0.342
          5.438

p [bar]:
          0.608
          1.586

Konvergenzrate (geschätzt):      0.998 (v), 0.998 (p)
Konvergenzrate (Lösung bekannt): 1.000 (v), 1.000 (p)
-----
Iteration: 10, Funktionsnorm = 0.000393821

v [m/s]:
          0.222
          3.711
         -0.342
          5.438

p [bar]:
          0.608
          1.586

Konvergenzrate (geschätzt):      0.999 (v), 0.999 (p)

```

Konvergenzrate (Lösung bekannt): 1.003 (v), 1.003 (p)

Iteration: 11, Funktionsnorm = 1.72108e-05

v [m/s]:
0.222
3.711
-0.342
5.438

p [bar]:
0.608
1.586

Konvergenzrate (geschätzt): 1.000 (v), 1.000 (p)

Konvergenzrate (Lösung bekannt): 1.032 (v), 1.032 (p)

Iteration: 12, Funktionsnorm = 7.7207e-07

v [m/s]:
0.222
3.711
-0.342
5.438

p [bar]:
0.608
1.586

Konvergenzrate (geschätzt): 1.000 (v), 1.000 (p)

Konvergenzrate (Lösung bekannt): NaN (v), NaN (p)

Die Iterationsschritte können wie in Abbildung 2.1 geplottet werden. Nach 12 Iterationen wurde Konvergenz der Funktionsnorm erreicht.

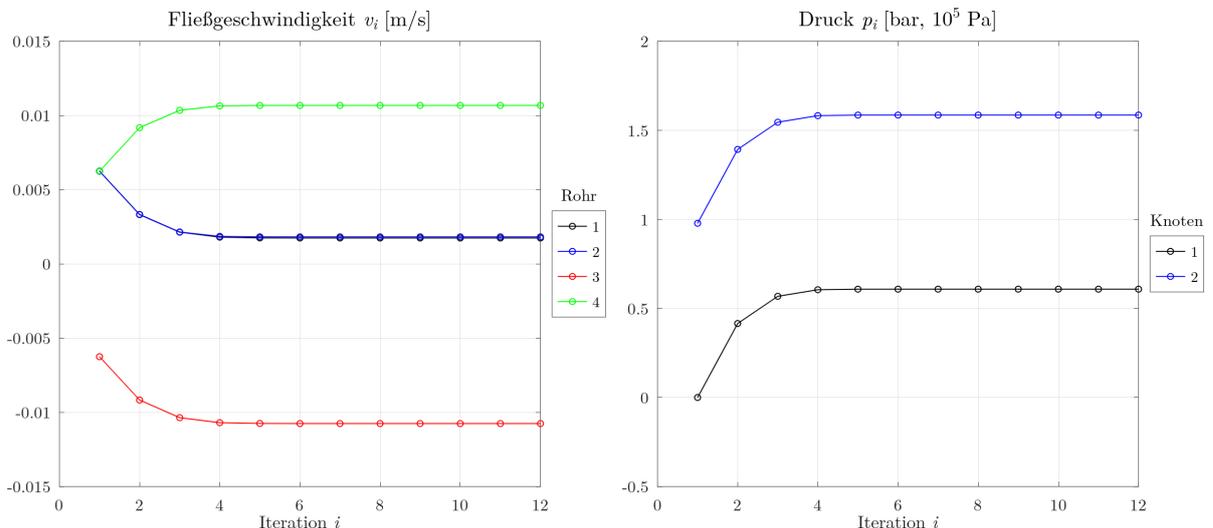


Abbildung 2.1: Strömungsgeschwindigkeit und Druck pro Iteration

Die Berechnung der Konvergenzrate nach beiden Formeln lässt sich in einer Funktion auslagern. Diese benötigt als Eingabeparameter eine Sequenz von vier Lösungswerten. Optional

ist die Angabe der Lösung als zweiter Parameter, falls diese in einer vorherigen Simulation bereits berechnet wurde.

```
function rate = calc_convergence (xn, xs)
% Prüfe Anzahl der Eingabevektoren
if nargin == 1
    % Lösung des Systems ist nicht bekannt

    % Berechne Differenz zwischen den
    % letzten vier Iterationen
    e = xn(:,2:4) - xn(:,1:3);
% Nur x-Vektor ohne bekannte Lösung
else
    % Lösung des Systems ist bekannt

    % Berechne Fehler der
    % letzten drei Iterationen zur Lösung
    e = xn(:,2:4) - xs;
end
% Hilfsvariablen der Normverhältnisse
tmp1 = norm( e(:,3) ) / norm( e(:,2) );
tmp2 = norm( e(:,2) ) / norm( e(:,1) );

if (tmp1 == 0) || (tmp2 == 0)
    % Rate ist undefiniert, wenn ein Term 0 ist
    rate = NaN;
else
    % Logarithmisches Verhältnis
    rate = log(tmp1) / log(tmp2);
end
end
```

Plottet man die Konvergenzrate, jeweils nach beiden Formeln berechnet, sieht man den Verlauf in Abbildung 2.2. Dabei wurde die Konvergenzrate separat für Druck und Strömungsgeschwindigkeit berechnet. Der Grund für diese Unterscheidung ist, dass die Größen von Druck und Volumenstrom in verschiedenen Größenordnungen liegen.

Es ist zu erkennen, dass anfangs die Abweichungen größer sind. Bei Schätzung der Konvergenzrate ist der Lösungswert noch nicht bekannt. Ab der achten Iteration beträgt die Konvergenzrate in beiden Fällen ungefähr 1.

Die letzte Iteration kann nur noch geschätzt werden, da die bereits vorher konvergierte Lösung x_s erreicht und die relative Differenz $(x_i - x_s)$ gleich null ist. Der Logarithmus in der Formel kann dann nicht verwendet werden.

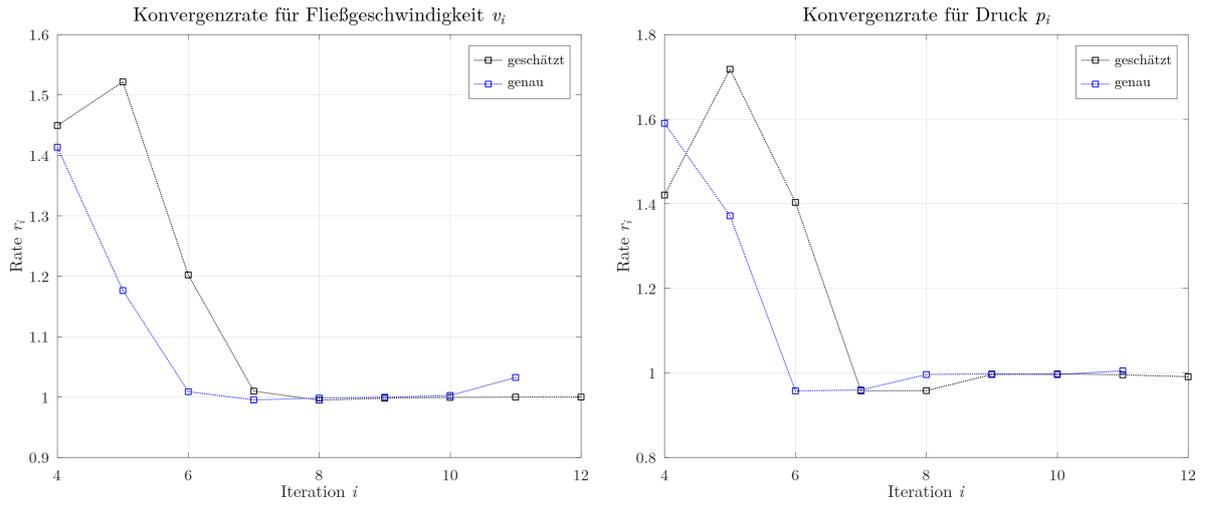


Abbildung 2.2: Konvergenzrate für Geschwindigkeit und Druck pro Iteration

3.4 Verallgemeinerung der Systems

Wir betrachten wieder das vorherige Beispiel, wobei nun Pumpen an beiden Knoten anliegen (siehe Abbildung 2.3). Die Pumpen werden jetzt vereinfacht mit eingehenden Volumenströmen dargestellt. Das Vorzeichen bestimmt dabei die Richtung. Die Ausgänge der Rohre 2 und 4 sind mit der Umgebung (Druck p_0 , Höhe h_0) gekoppelt, mit der auch die Pumpen verbunden sind.

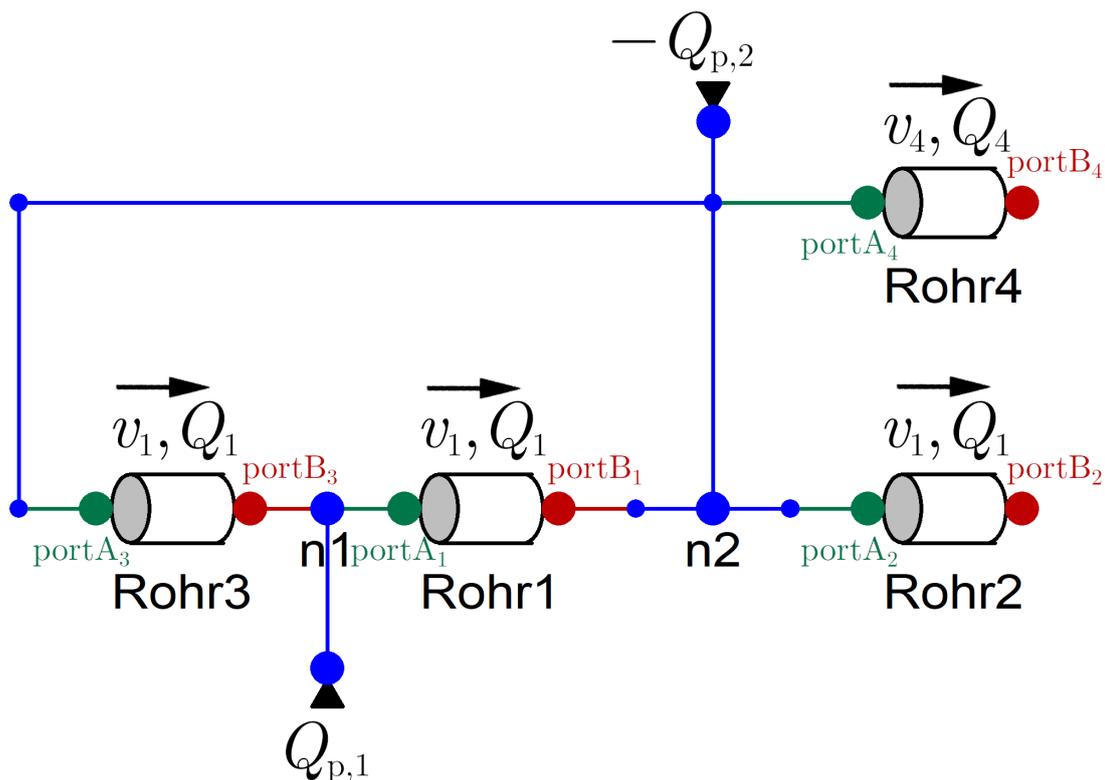


Abbildung 2.3: Modell eines Beispielsystems mit Verzweigungen

3.4.1 Portverbindungen

Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 2.3 an jedem Rohranschluss ein Bezeichner zu sehen. Mithilfe dieser Angaben kann eine Verknüpfungsmatrix erstellt werden. Diese besteht hier aus vier Zeilen, da es vier Rohre gibt. In der Spalte steht jeweils für Port A und B der Index des Knotens, mit welchem der jeweilige Anschluss verbunden ist. Beispiel: „Rohr 2: Anschluss A mit Knoten 2, Anschluss B mit Knoten 0 (Umgebung) verbunden“.

$$\mathbf{C}_{[n_e \times 2]} = \begin{bmatrix} \text{portA}_1 & \text{portB}_1 \\ \text{portA}_2 & \text{portB}_2 \\ \vdots & \vdots \\ \text{portA}_{n_e} & \text{portA}_{n_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad n_e = 4$$

3.4.2 Knotengleichungen aus Portverbindungen

Die Knotengleichungen für die Volumenstrombilanzen lauten nun mit beiden Pumpen

$$\begin{aligned} \text{n1:} & \quad Q_{p,1} - Q_1 + Q_3 = 0 \\ \text{n2:} & \quad -Q_{p,2} + Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4 = 0 \end{aligned}$$

In Matrixform lassen sich die Knotengleichungen allgemein schreiben als

$$\mathbf{Q}_{\text{in}} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

$\begin{matrix} 2 \times 1 & 4 \times 2 & 2 \times 1 & 2 \times 1 \end{matrix}$

Mit den Pumpenvolumenströmen \mathbf{Q}_{in} , Knotenmatrix \mathbf{M} und Rohrvolumenströmen \mathbf{Q}

$$\mathbf{Q}_{\text{in}} = \begin{bmatrix} Q_{p,1} \\ Q_{p,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

Die Matrix \mathbf{M} beinhaltet als Information die Richtung der Volumenströme, welche in den jeweiligen Knoten hineinfließen. Da definiert ist, dass der Volumenstrom von Anschluss A nach B fließt, ist die Richtung durch das Vorzeichen eindeutig.

3.4.3 Algorithmus für Knotenmatrix

Um aus der Portmatrix \mathbf{C} die Knotenmatrix \mathbf{M} zu bestimmen, wird ein Algorithmus benötigt. Die Knotenmatrix (im Code „Mq“) wird mit m Zeilen und n Spalten initialisiert, wobei für die Knotenzahl m und Rohranzahl n gilt. Pro Schleifendurchlauf wird die i -Zeile der Portmatrix „portConn“ ausgelesen, was ein Indexpaar „idx“ ergibt.

Wenn im Indexvektor „idx“ eine null vorhanden ist, wird in die Matrix „Mq“ nur eine +1 oder -1 geschrieben. Mit dem Skalarprodukt kann dies realisiert werden. Dazu dient die Codezeile „Mq (idx (idx > 0), i) = [-1,1] * (idx > 0)“.

Sind beide Elemente vom Indexvektor „idx“ ungleich null, kann das Wertepaar $(-1, 1)$ in die Matrix „Mq“ geschrieben werden. Die Werte im Indexvektor geben dabei die Zeilennummern an, daher genügt die Codezeile „Mq (idx, i) = [-1,1]“.

```
% Initialisierung Knotenmatrix Mq
Mq = zeros(max(portConn(:)), size(portConn,1));

% Schleife von 1:n, mit n:= Spaltenzahl von Knotenmatrix Mq
for i=1:size(Mq, 2)
    % Indexpaar der Anschlüsse für i-tes Rohr
    idx = portConn(i,:);

    % Wenn ein Index null ist, schreibe dort keine +/-1
    if min(idx) == 0
        % i-te Spalte: schreibe eine +/-1 (je nach Indexposition)
        Mq(idx(idx > 0),i) = [-1, 1] * (idx > 0)';
    else
        % i-te Spalte: fülle Zeilen über Indexvektor auf
        Mq(idx,i) = [-1, 1];
    end
end
```

3.4.4 Druckbilanzgleichung aus Portverbindungen

Ein Bezugspunkt wird mit dem virtuellen Knoten (h_0, p_0) festgelegt, wobei Höhe und Druck am Knoten konstant sind und beliebig festgelegt werden kann. Die Druckgleichungen eines Systems mit $n = 4$ Rohren $\{(d_i, l_i, Q_i, \lambda_i), i = 1 \dots n\}$ und $m = 2$ Knoten $\{(h_j, p_j), i = 1 \dots m\}$ lauten:

$$\text{Rohr 1: } (p_1 - p_2) + \rho g (h_1 - h_2) - \lambda_1 \frac{\rho}{2} \frac{l_i}{A_1^2 d_1} |Q_1| Q_1 = 0$$

$$\text{Rohr 2: } (p_2 - p_0) + \rho g (h_2 - h_0) - \lambda_2 \frac{\rho}{2} \frac{l_i}{A_2^2 d_2} |Q_2| Q_2 = 0$$

$$\text{Rohr 3: } (p_2 - p_1) + \rho g (h_2 - h_1) - \lambda_3 \frac{\rho}{2} \frac{l_i}{A_3^2 d_3} |Q_3| Q_3 = 0$$

$$\text{Rohr 4: } (p_2 - p_0) + \rho g (h_2 - h_0) - \lambda_4 \frac{\rho}{2} \frac{l_i}{A_4^2 d_4} |Q_4| Q_4 = 0$$

Diese vier Gleichungen lassen sich für das i -te Rohr im System verallgemeinern zu

$$\text{Rohr } i: (p_{i,A} - p_{i,B}) + \rho g (h_{i,A} - h_{i,B}) - \lambda_i \frac{\rho}{2} \frac{l_i}{A_i^2 d_i} |Q_{i,AB}| Q_{i,AB} = 0$$

Teilt man beide Seiten durch ρg , vereinfachen sich die Einheiten.

$$\frac{1}{\rho g} (p_{i,A} - p_{i,B}) + (h_{i,A} - h_{i,B}) - \lambda_i \frac{1}{2g} \frac{l_i}{A_i^2 d_i} |Q_{i,AB}| Q_{i,AB} = 0$$

Die Druckdifferenz $(p_{i,A} - p_{i,B}) / \rho g$ kann man mit neuen Variablen $(\tilde{p}_{i,A} - \tilde{p}_{i,B})$ ausdrücken, welcher der Höhe einer entsprechenden Wassersäule entsprechen. Die Höhendifferenz entlang des Rohres kann man mit $\Delta h_i = (h_{i,A} - h_{i,B})$ zusammenfassen. Für das i -te Rohr im System bedeutet dies nun

$$\text{Rohr } i: \quad \tilde{p}_{i,A} - \tilde{p}_{i,B} + \Delta h_i - K_i |Q_{i,AB}| Q_{i,AB} = 0, \quad \text{mit } K_i = \lambda_i \frac{1}{2g} \frac{l_i}{A_i^2 d_i}$$

Den Querschnitt kann man bei einem kreisrunden Rohr mit $A_i = \frac{\pi}{4} d_i^2$ ersetzen

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{i,A} - \tilde{p}_{i,B} + \Delta h_i - \lambda_i \frac{1}{2g} \frac{4^2 l_i}{\pi^2 (d_i^2)^2} \frac{l_i}{d_i} |Q_{i,AB}| Q_{i,AB} &= 0 \\ \tilde{p}_{i,A} - \tilde{p}_{i,B} + \Delta h_i - \lambda_i \frac{8}{\pi^2 g} \frac{l_i}{d_i^5} |Q_{i,AB}| Q_{i,AB} &= 0 \end{aligned}$$

3.4.5 Jacobi-Matrix

In Matrix-Schreibweise lässt sich daraus eine quadratische $n \times n$ Matrix bilden, wobei die Dimension n der Anzahl an Rohren entspricht. Daher sind es allgemein n Druckgleichungen und Volumenströme, wobei nach dem Beispiel $n = 4$ gilt.

$$\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial Q_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_4}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial f_4}{\partial Q_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2K_1 |Q_1| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2K_2 |Q_2| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2K_3 |Q_3| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2K_4 |Q_4| \end{bmatrix}$$

Die Matrix \mathbf{J}_{12} lässt sich aus der Portmatrix \mathbf{C} herleiten. In den Elementen der Matrix \mathbf{C} stehen die Knotennummern, wobei der Knoten mit dem Index „0“ der Umgebung entspricht. In der zweiten Spalte steht der Knoten mit Index, an dem der Druck mit einem negativen Vorzeichen versehen muss.

$$\mathbf{C}_{[4 \times 2]} = \begin{bmatrix} \text{portA}_1 & \text{portB}_1 \\ \text{portA}_2 & \text{portB}_2 \\ \vdots & \vdots \\ \text{portA}_{n_e} & \text{portA}_{n_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} p(1) - p(2) \\ p(2) - p(0) \\ p(2) - p(1) \\ p(2) - p(0) \end{bmatrix}$$

Die Spaltennummer der Matrix \mathbf{J}_{12} entspricht dem Knotenindex. In der Portmatrix \mathbf{C} ist die Information gespeichert, welches Vorzeichen versehen werden muss. Wird zeilenweise Matrix \mathbf{C} durchlaufen, kann man die Zeile für \mathbf{J}_{12} daraus konstruieren.

$$\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_4}{\partial p_1} & \frac{\partial f_4}{\partial p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

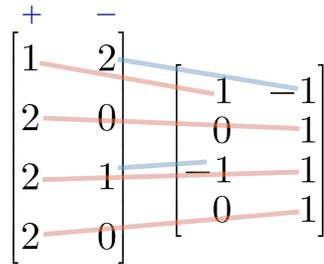
Ein Rohr ist abgesehen vom Volumenstrom über die Druckdifferenz an beiden Anschlüssen definiert. Ist die Summe einer i -ten Zeile der Verknüpfungsmatrix \mathbf{C} ungleich null, ist das jeweilige i -te Rohr mit einer Seite an den Knoten mit Index 0 angeschlossen. Dies kann die Umgebung sein, aber in einem geschlossenen System auch ein Knoten mit fest definiertem Druck und Höhe. Der Druck p_0 ist konstant und daher keine Systemvariable. In der Matrix \mathbf{J}_{12} , wo die partiellen Ableitungen nach den Druckvariablen stehen, können daher Nullen vorkommen.

Die übrigen Matrizen lassen sich leicht bilden. Untermatrix \mathbf{J}_{21} ist identisch mit der Knotenmatrix \mathbf{M} und \mathbf{J}_{22} ist eine Nullmatrix.

$$\mathbf{J}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial Q_4} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial g_2} & \dots & \frac{\partial Q_4}{\partial g_2} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial Q_4}{\partial Q_4} \end{bmatrix} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{J}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial p_1} & \frac{\partial g_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial p_1}{\partial g_2} & \frac{\partial p_2}{\partial g_2} \\ \frac{\partial p_1}{\partial p_1} & \frac{\partial p_2}{\partial p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4.6 Algorithmus für Druckdifferenzmatrix

Die Elemente der Verknüpfungsmatrix \mathbf{C} werden, wie in Abbildung, verknüpft. Dies ist eine Transformation, bei der die Spalte der linken Matrix \mathbf{C} das Vorzeichen definiert. In der rechten Matrix \mathbf{J}_{12} steht in der Spalte, der Elementnummer der linken Matrix \mathbf{C} entsprechend, eine vorzeichenbehaftete Eins.



Ein Algorithmus ist realisierbar, welcher die Portverknüpfungsmatrix wie auf der linken Seite in eine Druckdifferenzmatrix entsprechend der rechten Seiten umwandelt. Dies gilt dann für allgemeine Systeme, selbst wenn als theoretischer Fall kein Rohr mit der Umgebung verbunden und dadurch keine Nullelemente in der Portmatrix vorhanden wäre.

```
% Initialisierung Druckdifferenzmatrix Mp
Mp = zeros(size(portConn,1), max(portConn(:)));

% Schleife von 1:n, mit n:= Zeilenzahl von Druckdifferenzmatrix Mp
for i=1:size(Mp, 1)
    % Indexpaar der Anschlüsse für i-tes Rohr
    idx = portConn(i,:);

    % Wenn ein Index null ist, schreibe dort keine +/-1
    if min(idx) == 0
        % i-te Zeile: schreibe eine +/-1 (je nach Indexposition)
        Mp(i,idx(idx > 0)) = [1,-1] * (idx > 0)';
    else
        % i-te Zeile: fülle Zeilen über Indexvektor auf
        Mp(i,idx) = [1,-1];
    end
end
end
```

Es fällt auf, dass der Algorithmus den gleichen Aufbau wie zur Bildung der Knotenmatrix aufweist. Nur der Index der Matrix und die Reihenfolge des zu füllenden Wertepaares (± 1) ist vertauscht. Daher kann man in einer Schleife beide Matrizen auffüllen. Als Beispiel ist zu Beginn mit „portConn“ eine Portmatrix der Verbindungen angegeben.

Die Anzahl an Rohren entspricht der Zeilenzahl der Portmatrix „portConn“ und wird der Variablen „Npipes“ zugewiesen. Die Knotenzahl lässt sich ermitteln, indem der maximale Wert, also der höchste Knotenindex, in der Portmatrix gesucht wird.

```
% Portverbindungs-Matrix (Rohr i: Port (A,B) and Knoten)
portConn = [1,2; 2,0; 2,1; 2,0];

% Anzahl der Rohre und Knoten
Npipes = size(portConn, 1);
Nnodes = max( portConn(:) );

% Initialisierung Druckdifferenzmatrix Mp
Mp = zeros(Npipes, Nnodes);
% Initialisierung Knotenmatrix Mq (Transponierte von Mp)
Mq = Mp';
```

```

for i=1:size(Mp, 1)
    % Indexpaar der Anschlüsse für i-tes Rohr
    idx = portConn(i,:);

    % Wenn ein Index null ist, schreibe dort keine +/-1
    if min(idx) == 0
        % i-te Zeile: schreibe eine +/-1 (je nach Indexposition)
        Mp(i,idx(idx > 0)) = [1,-1] * (idx > 0)';
        % i-te Spalte: schreibe eine +/-1 (je nach Indexposition)
        Mq(idx(idx > 0),i) = [-1, 1] * (idx > 0)';
    else
        % i-te Zeile: fülle Zeilen über Indexvektor auf
        Mp(i,idx) = [1,-1];
        % i-te Spalte: fülle Zeilen über Indexvektor auf
        Mq(idx,i) = [-1, 1];
    end
end
end

```

3.5 Erweiterung des Gleichungssystems

3.5.1 Colebrook-White-Gleichungen

Bisher wurde der Rohrreibbeiwert mittels einer Näherungsformel berechnet. Nun wird zur Berechnung dieses Reibungsfaktors die implizite Colebrook-White-Gleichung verwendet, wodurch das System um weitere Gleichungen erweitert wird. Die Gleichung lautet:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{c_1}{\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{c_2 d} \right), \quad c_1 \approx 2,51, \quad c_2 \approx 3,7$$

Zur Bestimmung der Lösung müssen alle Terme auf eine Seite gebracht werden. Außerdem soll eine komplexe Lösung ausgeschlossen werden, daher muss λ_i positiv sein. Für das i -te Rohr gilt damit die zu lösende Gleichung.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} + 2 \log_{10} \left(\frac{c_1}{\operatorname{Re}_i \sqrt{\lambda_i}} + c_2^{-1} \frac{k_i}{d_i} \right) = 0, \quad \lambda_i > 0$$

Um die Komplexität der Gleichung zu reduzieren, bietet es sich an, die Variable in der Quadratwurzel in eine neue Variable umzuschreiben. Damit lässt sich auch der Bruch auflösen.

$$\lambda_{(\text{inv-rt}),i} + 2 \log_{10} \left(\frac{c_1}{\operatorname{Re}_i} \lambda_{(\text{inv-rt}),i} + c_2^{-1} \frac{k_i}{d_i} \right) = 0, \quad \text{mit } \lambda_{(\text{inv-rt}),i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$$

Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass die Umwandlung in die ursprüngliche Variable erst nach der Lösung des Gleichungssystem erforderlich wird. Es gilt:

$$\lambda_i = \left(\lambda_{(\text{inv-rt}),i} \right)^{-2} = \frac{1}{\lambda_{(\text{inv-rt}),i}} \cdot \frac{1}{\lambda_{(\text{inv-rt}),i}}, \quad \lambda_{(\text{inv-rt}),i} \neq 0$$

Negative Werte der Variablen $\lambda_{\text{inv-rt},i}$ sind aufgrund des Logarithmus problematisch und außerdem physikalisch nicht sinnvoll. Damit ungültige Werte in Gleichung bei der Lösung ausgeschlossen werden können, wird der Betrag der Variablen genommen.

$$f_{\text{CW},i} = \left| \lambda_{(\text{inv-rt}),i} \right| + 2 \log_{10} \left(\frac{c_1}{\operatorname{Re}_i} \left| \lambda_{(\text{inv-rt}),i} \right| + c_2^{-1} \frac{k_i}{d_i} \right) = 0, \quad \text{mit } \left| \lambda_{(\text{inv-rt}),i} \right| = \left| \lambda_i \right|^{-\frac{1}{2}}$$

Plottet man diese Funktion $f_{CW,i}$ für verschiedene Reynoldszahlen, ergibt dies den Graphen in Abbildung 2.4. Als Beispiel wird ein Rohr mit Durchmesser $d = 1$ m und relativer Rauheit $k/d = 10^{-3}$ gewählt, wobei für das Fluid relevante Parameter gilt: $\rho = 997$ kg/m³, $\eta = 10^{-3}$ Pa s, $g = 9.81$ m/s².

Es wird nur die rechte Seite des Graphens dargestellt, für negative Werte der Variablen $\lambda_{inv-rt,i}$ wäre der Verlauf nur um die vertikale Achse gespiegelt. Ein Wert auf der horizontalen Achse mit $\lambda_{inv-rt,i} = 100$ entspricht einem Rohrreibwert von $\lambda_i = 10^{-4}$. Ab dieser Größenordnung ist die Steigung annähernd konstant und die drei Kurven laufen auf die Näherungsformel eines hydraulisch glatten Rohres zu. Für $\lambda_{inv-rt,i} < 10$, also einen Rohrreibwert von $\lambda_i > 0.01$ entsprechend, nimmt die Colebrook-White-Gleichung schnell ab. Bei Werten von $\lambda_{inv-rt,i} \leq 1$ (Rohrreibwert $\lambda_i \geq 1$) wirkt sich im Logarithmus der Gleichung die relative Rauheit k_i/d_i stärker aus, jedoch sind solche Werte im Moody-Diagramm nicht dargestellt und technisch nicht sinnvoll.

Bei $\lambda_{inv-rt,i} = 0$ (theoretisch unendlich hoher Rohrreibungswert) hat die Funktion wegen des gespiegelten Verlaufs auf der negativen Achse eine Sprungstelle mit undefinierter Ableitung. Aus diesem Grund sollte der Anfangswert von $\lambda_{inv-rt,i}$ eines Rohres nicht kleiner als 1, sondern sicherheitshalber mit dem Wert 10 oder 100 gewählt werden.

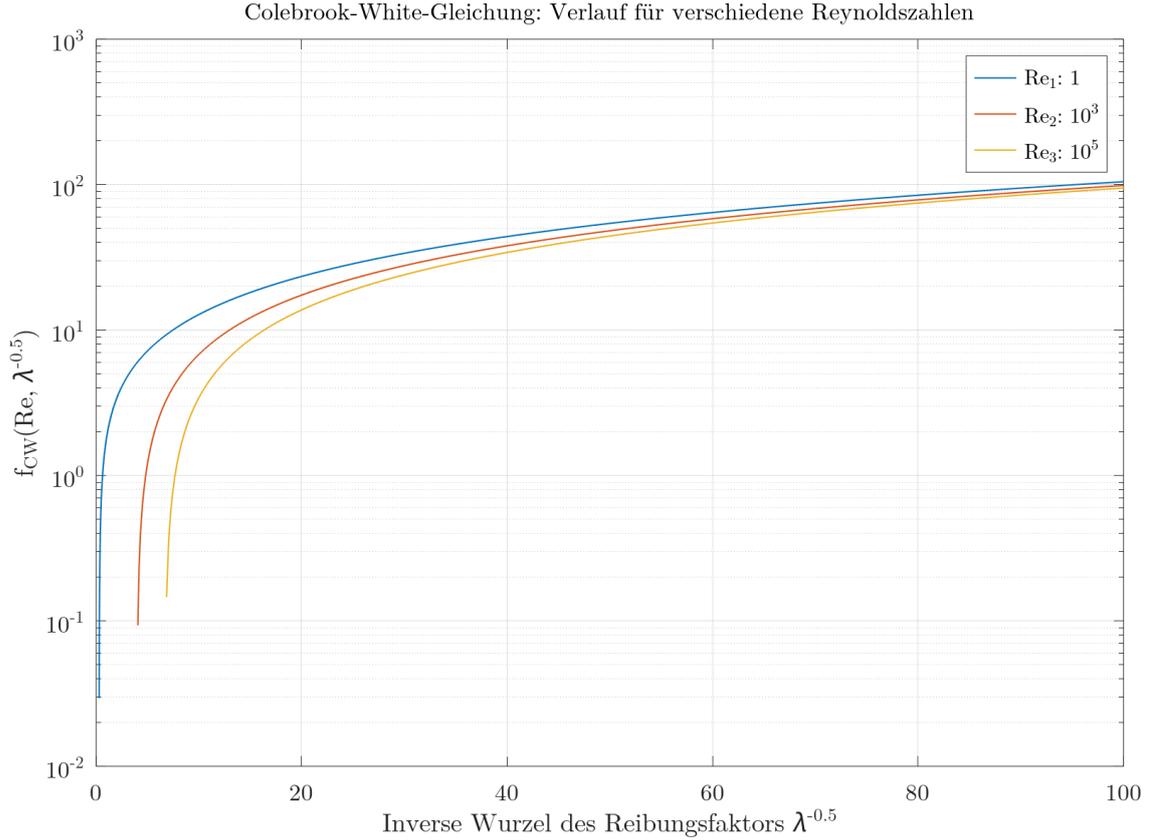


Abbildung 2.4: Abhängigkeit der Colebrook-White-Gleichung vom Reibungsfaktor

Die Nullstellen der Funktion $f_{CW,i}$ sollen bestimmt werden. Damit das Newton-Verfahren angewendet werden kann, benötigt man noch die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f_{CW,i}}{\partial \lambda_{(inv-rt),i}} = \frac{\partial}{\partial \lambda_{(inv-rt),i}} \left| \lambda_{(inv-rt),i} \right| + \frac{\partial}{\partial \lambda_{(inv-rt),i}} 2 \log_{10} \left(\frac{c_1}{Re_i} \left| \lambda_{(inv-rt),i} \right| + c_2^{-1} \frac{k_i}{d_i} \right)$$

Das Ergebnis der partiellen Ableitung mit Berücksichtigung der Betragsableitung

$\frac{d}{dx} |x| = x |x|^{-1}$, des Logarithmusgesetzes $\log_{10}(x) = \ln(x) / \ln(10)$ und der Kettenregel lautet

$$\frac{\partial f_{CW,i}}{\partial \lambda_{(inv-rt),i}} = \frac{\lambda_{(inv-rt),i}}{\left| \lambda_{(inv-rt),i} \right|} + 2 c_1 c_2 \frac{\lambda_{(inv-rt),i}}{\left| \lambda_{(inv-rt),i} \right|} \frac{1}{\ln(10)} \left(\frac{c_1}{Re_i} \left| \lambda_{(inv-rt),i} \right| + c_2^{-1} \frac{k_i}{d_i} \right)^{-1}$$

Da außerdem $\lambda_{inv-rt,i} \neq 0$ gilt, entsprechen die Terme $\lambda_{...}/|\lambda_{...}|$ dem Vorzeichen der Variablen $\lambda_{inv-rt,i}$. Daher kann die partielle Ableitung vereinfacht werden zu

$$\frac{\partial f_{\text{CW},i}}{\partial \lambda_{(\text{inv-rt}),i}} = \text{sgn}(\lambda_{(\text{inv-rt}),i}) \left[1 + 2 c_1 c_2 \frac{1}{\ln(10)} \left(\frac{c_1}{\text{Re}_i} |\lambda_{(\text{inv-rt}),i}| + c_2^{-1} \frac{k_i}{d_i} \right)^{-1} \right]$$

Die Signumfunktion „sgn“ gibt je nach Vorzeichen des Arguments entweder eine 1 oder -1 aus. Ist das Argument null, gibt auch die sgn-Funktion den Wert 0 aus. Bei den Programmiersprachen ist dies unter anderem in Python, Matlab und Octave der Fall.

Da die Reynoldszahl vom Volumenstrom abhängt, wird eine weitere partielle Ableitung benötigt. Mit $\text{Re}_i = \frac{\rho d}{\eta} |v_i| = \frac{\rho d}{A \eta} |q_i|$ lässt sich die Funktion umschreiben zu

$$f_{\text{CW},i} = |\lambda_{(\text{inv-rt}),i}| + 2 \log_{10} \left(c_1 \frac{A \eta}{\rho d} |q_i|^{-1} |\lambda_{(\text{inv-rt}),i}| + c_2^{-1} \frac{k_i}{d_i} \right) = 0$$

Dies kann nun partiell nach dem Volumenstrom abgeleitet werden. Man erhält:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} f_{\text{CW},i} = -2 \frac{c_1 c_2}{\ln(10)} |\lambda_{(\text{inv-rt}),i}| \left(c_1 c_2 |\lambda_{(\text{inv-rt}),i}| + \frac{k_i}{d_i} \frac{\rho d}{A \eta} |q_i| \right)^{-1} q_i^{-1}$$

Mithilfe der Reynoldszahl vereinfacht dies sich zu

$$\frac{\partial}{\partial q_i} f_{\text{CW},i} = -2 \frac{c_1 c_2}{\ln(10)} |\lambda_{(\text{inv-rt}),i}| \left(c_1 c_2 |\lambda_{(\text{inv-rt}),i}| + \frac{k_i}{d_i} \text{Re}_i \right)^{-1} q_i^{-1}$$

Die beiden partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_{\text{CW},i}}{\partial \lambda_{(\text{inv-rt}),i}}$ und $\frac{\partial}{\partial q_i} f_{\text{CW},i}$ hängen neben dem Rohrreibungskoeffizienten direkt von der Reynoldszahl und Volumenstrom ab. Mindestens eine der Variablen steht im Nenner, daher gibt es wie bei der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ eine Polstelle. Plottet man die Graphen der partiellen Ableitungen, erhält man den Verlauf in Abbildung. Weil die Funktion von zwei Variablen abhängt, wird jeweils eine Variable fixiert.

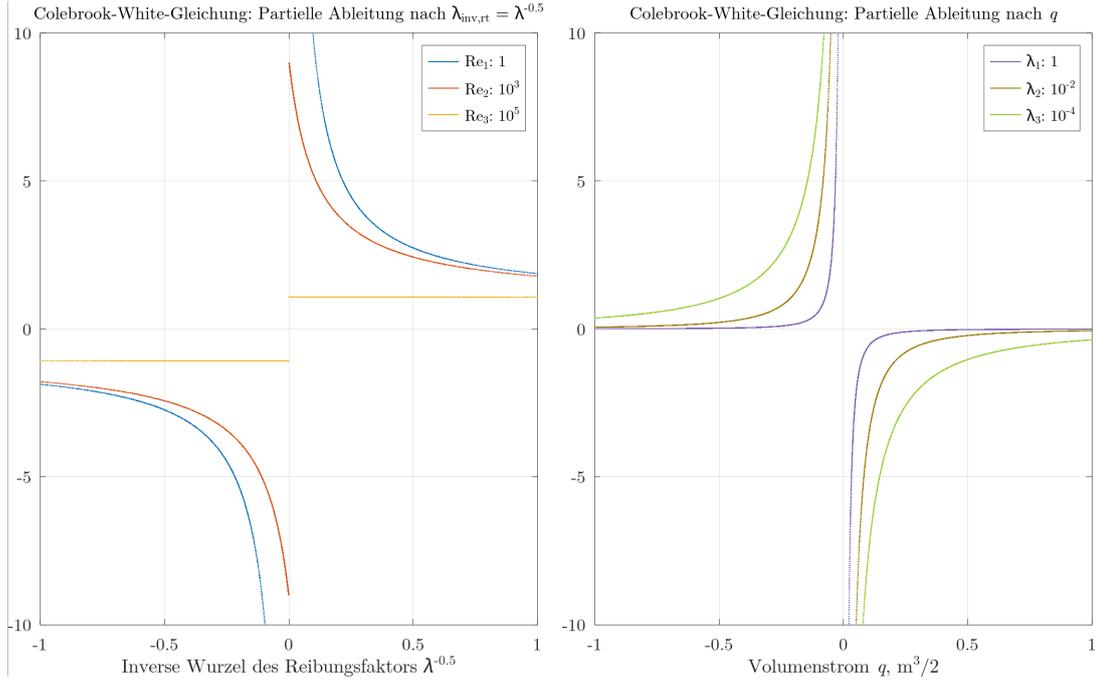


Abbildung 2.5: Plot der Colebrook-White-Gleichung

3.5.2 Druckbilanzgleichungen

Die partielle Ableitung nach dem Druck p_i ist gleich null, weil die Colebrook-White-Funktion nur von der inversen Wurzel des Reibungsfaktor $\lambda_{\text{inv-rt},i}$ und vom Volumenstrom q_i abhängt.

Die auf Einheit Meter normierte Druckgleichung für das i -te Rohr lautet bekanntermaßen

$$f_{P,i} = \tilde{p}_{i,A} - \tilde{p}_{i,B} + \Delta h_i - \lambda_i \frac{1}{2g} \frac{l}{A_i^2 d_i} |q_i| q_i = 0, \quad \tilde{p}_{i,A} = \frac{p_{i,A}}{\rho g}$$

Die Funktion $f_{P,i}$ kann für verschiedene Rohrreibungsbeiwerte über den Volumenstrom geplottet werden, wobei die statischen Drücke und Höhenunterschiede gleich null gesetzt werden (siehe Abbildung 2.6). Es wird als Beispiel ein Rohr mit Durchmesser $d = 1$ m gewählt. Die Fluidparameter wie Dichte und dynamische Viskosität spielen hier keine Rolle. Durch die Betragsfunktion $|q_i|$ multipliziert mit dem Volumenstrom q_i wird das Vorzeichen berücksichtigt.

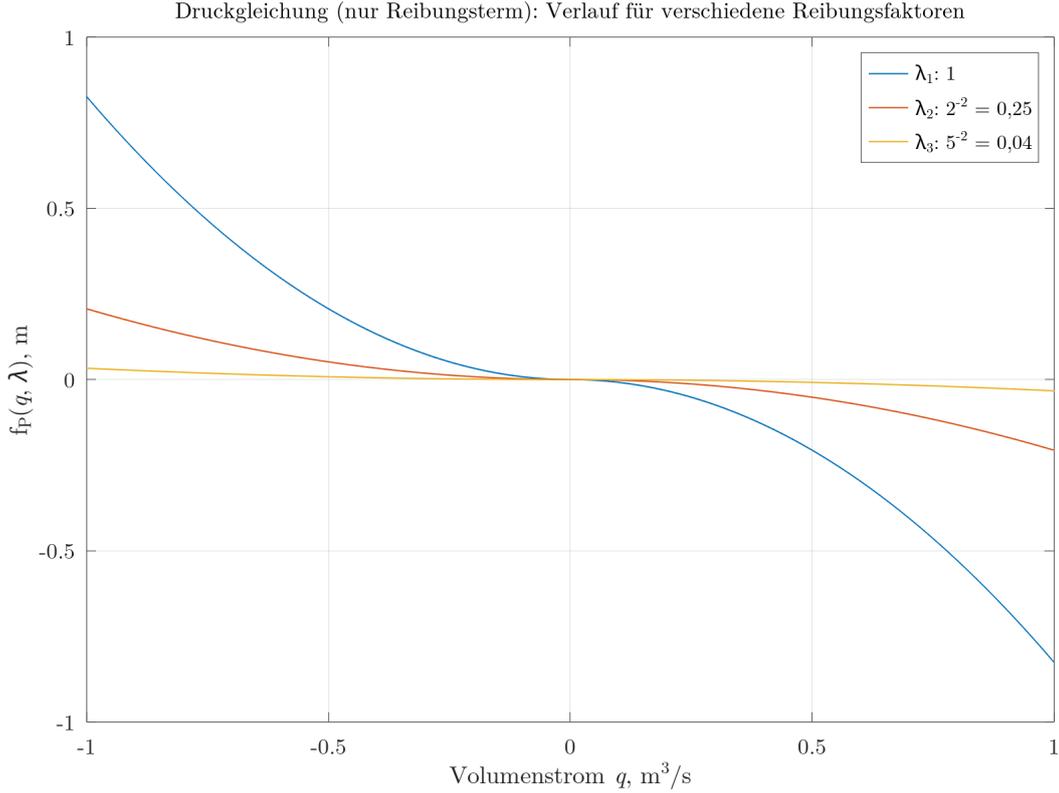


Abbildung 2.6: Plot der Druckgleichung nach Bernoulli

Nur der Reibungsterm $-\lambda_i \dots$ ist vom Volumenstrom abhängig, daher lautet die partielle Ableitung bezüglich der Variable q_i direkt

$$\frac{\partial}{\partial q_i} f_{P,i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(-\lambda_i \frac{1}{2g} \frac{l}{A_i^2 d_i} |q_i| q_i \right) = -\lambda_i \frac{1}{g} \frac{l}{A_i^2 d_i} |q_i| = \left(\lambda_{(\text{inv-rt},i)} \right)^{-2} \frac{1}{g} \frac{l}{A_i^2 d_i} |q_i|$$

Diese partielle Ableitung entspricht genau dem Fall, bei dem der Rohrreibbeiwert mit einer Näherungsformel ermittelt wird. Der einzige Unterschied ist, dass im letzten Schritt die Variable ersetzt wurde. Der Rohrreibbeiwert λ_i kann aber auch über $\lambda_i = (\lambda_{\text{inv-rt},i})^{-2}$ separat berechnet werden, sodass die vorherige Formel unverändert verwendbar ist.

Es werden noch die partiellen Ableitungen bezüglich $\lambda_{\text{inv-rt},i}$ benötigt. Dazu muss die Variable λ_i in der Druckgleichung mit der neuen Variable $\lambda_{\text{inv-rt},i}$ ersetzt werden. Mit der Variablentransformation $\lambda_i = (\lambda_{\text{inv-rt},i})^{-2}$ ergibt dies die Druckgleichung:

$$\tilde{p}_{i,A} - \tilde{p}_{i,B} + \Delta h_i - \left(\lambda_{\text{inv-rt},i} \right)^{-2} \frac{1}{2g} \frac{l}{A_i^2 d_i} |q_i| q_i = 0, \quad \tilde{p}_{i,A} = \frac{p_{i,A}}{\rho g}, \quad \lambda_{\text{inv-rt},i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$$

Die partiellen Ableitungen bezüglich $\lambda_{\text{inv-rt},i}$ können nun bestimmt werden. Auch hier ist nur der Reibungsterm $-\lambda_i \dots$ entscheidend. Die partielle Ableitung lautet

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_{\text{inv-rt},i}} f_{P,i} = \frac{\partial}{\partial \lambda_{\text{inv-rt},i}} \left(-(\lambda_{\text{inv-rt},i})^{-2} \frac{1}{2g} \frac{l}{A_i^2 d_i} |q_i| q_i \right) = (\lambda_{\text{inv-rt},i})^{-3} \frac{1}{2g} \frac{l}{A_i^2 d_i} |q_i| q_i$$

Plottet man beide partiellen Ableitungen, erhält man die Graphen in Abbildung 2.7. Eine der Variablen wird fixiert, sodass jeweils drei Kurven zu sehen sind. Auch hier ist in der linken Seite eine Polstelle zu sehen, daher ist die Ableitung für $\lambda_{\text{inv-rt},i} = 0$ undefiniert. Auf der rechten Seite erkennt man den Verlauf wie bei einer Betragsfunktion.

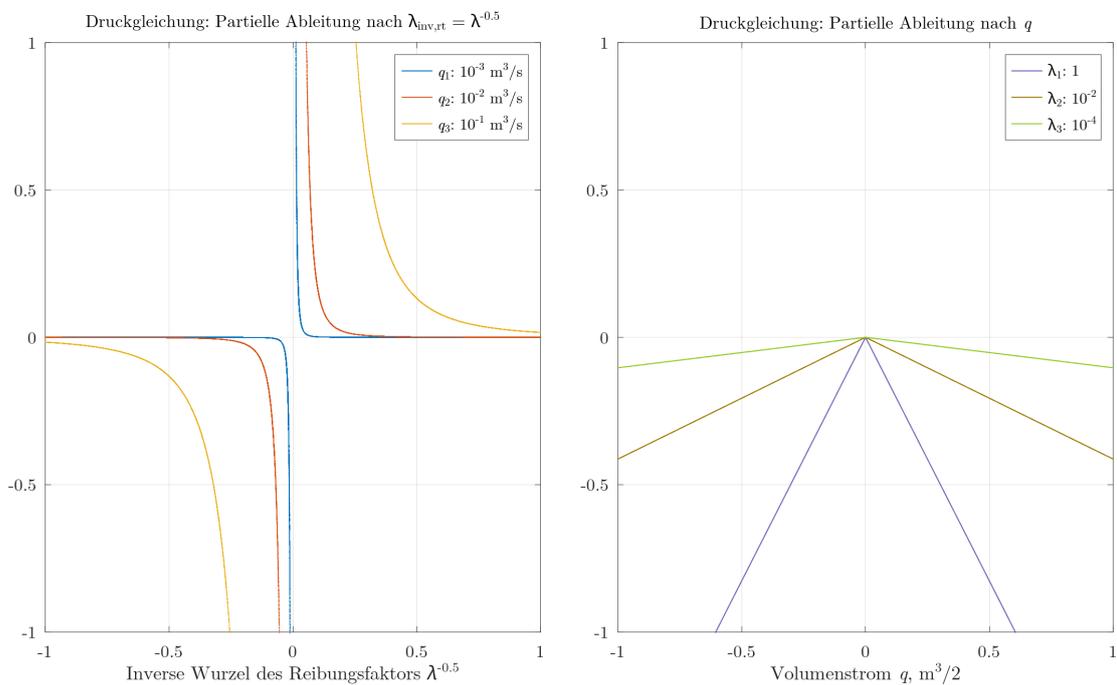


Abbildung 2.7: Plot der Colebrook-White-Gleichung

3.6 Erweiterung der Jacobi-Matrix

3.6.1 Grundstruktur

Die bereits aufgestellten partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial q_i} f_{\text{CW},i}$ und $\frac{\partial}{\partial \lambda_{\text{inv-rt},i}} f_{\text{CW},i}$ bilden die Diagonalelemente der Jacobi-Submatrizen \mathbf{J}_{31} und \mathbf{J}_{33} . Die Submatrix \mathbf{J}_{32} ist dagegen eine Nullmatrix, da die Colebrook-White-Gleichung $f_{\text{CW},i}$ unabhängig von der Druckvariablen \tilde{p} ist. Das bereits hergeleitete System, bei dem der Rohrreibbeiwert mittels einer Näherungsformel explizit berechnet wird, wird mit den neuen Matrizen $\mathbf{J}_{31} \dots \mathbf{J}_{33}$ um eine weitere Zeile erweitert.

$$\mathbf{J} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \hline \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{J}_{13} \\ \hline \mathbf{J}_{23} \\ \hline \end{array} \\ \hline \text{System (reduziert)} & & \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{J}_{31} & \mathbf{J}_{32} \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{J}_{33} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Die Matrizen \mathbf{J}_{13} , \mathbf{J}_{23} bilden die übrigen Einträge der letzten Spalte. Submatrix \mathbf{J}_{23} enthält die partiellen Ableitungen der Knotengleichungen bezüglich des inversen, quadrierten Rohrreibbeiwerts. In den Knotengleichungen stehen nur Volumenströme, daher handelt es sich bei \mathbf{J}_{23} um eine Nullmatrix.

3.6.2 Blockmatrix für Druckgleichungen

Über die partiellen Ableitungen der Druckgleichung $\frac{\partial}{\partial q_i} f_{\text{P},i}$, $\frac{\partial}{\partial \lambda_{\text{inv-rt},i}} f_{\text{P},i}$ sind die Diagonalelemente von \mathbf{J}_{13} , \mathbf{J}_{33} bekannt. Man erhält die beiden quadratischen Matrizen:

$$\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} f_{\text{P},1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial q_n} f_{\text{P},n} \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \frac{l}{A_1^2 d_1} |q_1| & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \frac{l}{A_n^2 d_n} |q_n| \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{13} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{P,1}}{\partial \lambda_{(\text{inv-rt}),1}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_{P,n}}{\partial \lambda_{(\text{inv-rt}),n}} \end{bmatrix} = -\frac{l}{2g} \begin{bmatrix} \frac{(\lambda_{(\text{inv-rt}),1})^{-3}}{A_1^2 d_1} |q_1| q_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\lambda_{(\text{inv-rt}),n})^{-3}}{A_n^2 d_n} |q_n| q_n \end{bmatrix}$$

3.6.3 Blockmatrix für Knotenbilanzgleichungen

Für die Knotengleichung des i . Rohrs gilt die gleiche Vorgehensweise, wobei diese Gleichung unabhängig von den Variablen für Druck und Rohrreibbeiwert ist. Es ist nur zu beachten, dass diese Matrizen in der Regel nicht quadratisch sind. Die Anzahl an Druckvariablen $p_1 \dots p_m$ und Knotengleichungen $f_{K,1} \dots f_{K,m}$ können unterschiedlich sein. Daher erhält man die Nullmatrizen:

$$\mathbf{J}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1} f_{K,1} & \dots & \frac{\partial}{\partial p_m} f_{K,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial p_1} f_{K,m} & \dots & \frac{\partial}{\partial p_m} f_{K,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

$$\mathbf{J}_{23} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda_{(\text{inv-rt}),1}} f_{K,1} & \dots & \frac{\partial}{\partial \lambda_{(\text{inv-rt}),n}} f_{K,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_{(\text{inv-rt}),1}} f_{K,n} & \dots & \frac{\partial}{\partial \lambda_{(\text{inv-rt}),n}} f_{K,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

3.6.4 Blockmatrix für Colebrook-White-Gleichungen

Die Colebrook-White-Gleichungen $f_{CW,1} \dots f_{CW,n}$ sind unabhängig vom Druck, weshalb daraus eine weitere Nullmatrix folgt. Diese ist bei unterschiedlicher Knoten- und Rohranzahl keine quadratische Matrix.

$$\mathbf{J}_{32} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1} f_{\text{CW},1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial p_m} f_{\text{CW},1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial p_1} f_{\text{CW},n} & \cdots & \frac{\partial}{\partial p_m} f_{\text{CW},n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Die Jacobi-Untermatrizen in der letzten Spalte vom Gesamtsystem sind abgesehen von der Nullmatrix \mathbf{J}_{32} komplizierter und lassen sich mit der Abkürzung „diag(...)“ übersichtlicher darstellen. Der Laufindex i geht dabei von 1 bis n , wobei der Wert n der Anzahl der Rohre entspricht.

$$\mathbf{J}_{31} = \text{diag} \left(-2 \cdot \frac{c_1 c_2}{\ln(10)} \cdot \frac{|\lambda_{(\text{inv-rt}),i}| q_i^{-1}}{c_1 c_2 |\lambda_{(\text{inv-rt}),i}| + \frac{k_i}{d_i} \text{Re}_i}, \quad i = 1 : n \right),$$

$$\mathbf{J}_{33} = \text{diag} \left(\frac{\text{sgn}(\lambda_{(\text{inv-rt}),i})}{1 + 2 c_1 c_2 \frac{1}{\ln(10)} \left(\frac{c_1}{\text{Re}_i} |\lambda_{(\text{inv-rt}),i}| + c_2^{-1} \frac{k_i}{d_i} \right)}, \quad i = 1 : n \right)$$

3.6.5 Zusammenfassung und Beispiel

Die fehlenden Matrizen \mathbf{J}_{12} , \mathbf{J}_{21} entsprechen den Indexmatrizen für Druckdifferenz $\mathbf{P}_{[n \times m]}$ und Knotenverbindungen $\mathbf{M}_{[m \times n]}$. Dies sind Matrizen mit konstanten Werten. Es gilt:

$$\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1} f_{\text{P},1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial p_m} f_{\text{P},1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial p_1} f_{\text{P},n} & \cdots & \frac{\partial}{\partial p_m} f_{\text{P},n} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{[n \times m]},$$

$$\mathbf{J}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} f_{\text{K},1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_n} f_{\text{K},1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_1} f_{\text{K},m} & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_n} f_{\text{K},m} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{[m \times n]}$$

Im bereits gezeigten Beispiel enthalten diese Matrizen folgende Werte:

$$\mathbf{P}_{[4 \times 2]} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{[2 \times 4]} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Mithilfe dieser beiden Matrizen ist es möglich, die Rohrverbindungen des Systems nur mit dem Wertepaar $(-1, 0, 1)$ eindeutig zu definieren. Jeder dieser Matrizen beschreibt das System vollständig und ist ableitbar aus den Portverknüpfungen, also an welcher Knotennummer jedes Rohr angeschlossen ist. Dadurch können die Druck- und Knotengleichungen für ein beliebiges System aufgestellt werden.

Jede Zeile der Matrix $\mathbf{P}_{[4 \times 2]}$ entspricht einem Rohr, wobei die Einträge dem Vorzeichen des Drucks, also Spalte 1 und 2, entspricht. Bei Matrix $\mathbf{M}_{[2 \times 4]}$ steht eine Zeile für die Bilanz der Volumenströme für den jeweiligen Knoten.

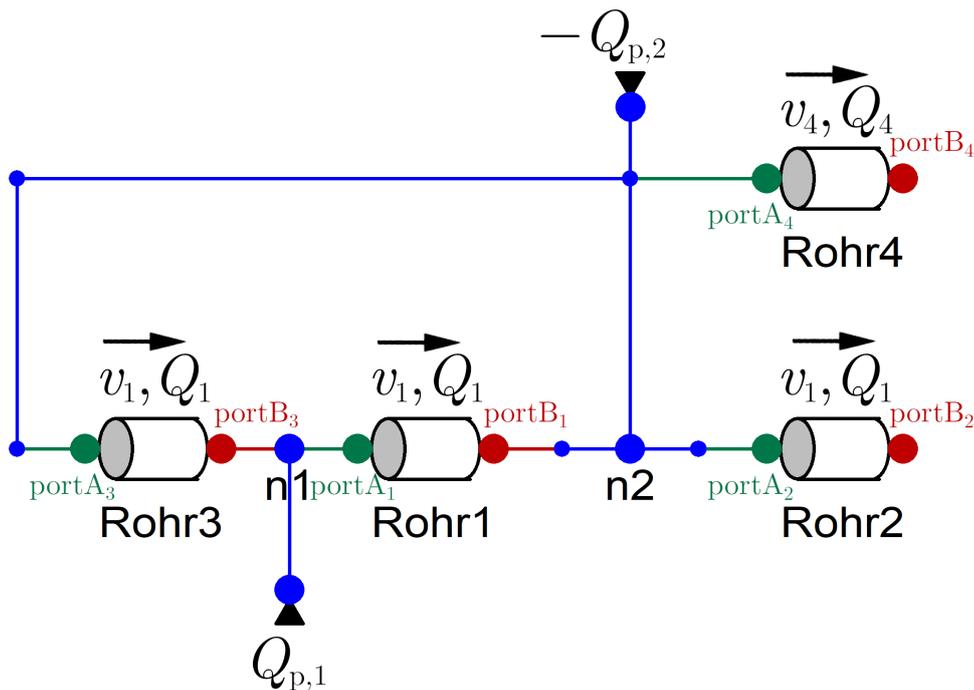


Abbildung 2.8: System mit zwei Knoten und vier Rohren

Für das System aus Abbildung, welches eine Knoten- und Rohrzahl $(n, m) = (4, 2)$ hat, lautet die Zusammensetzung der gesamten Jacobi-Matrix nun:

$$\mathbf{J} = \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cc} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{array}} \\ \text{System (reduziert)} \\ \boxed{\begin{array}{cc} \mathbf{J}_{31} & \mathbf{J}_{32} \end{array}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{J}_{13} \\ \mathbf{J}_{23} \end{array}} \\ \\ \boxed{\mathbf{J}_{33}} \end{array} = \left[\begin{array}{ccc} \underbrace{\mathbf{J}_{11} = \text{diag}(\dots)}_{n \times n} & \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ n \times m \end{array} & \underbrace{\mathbf{J}_{13} = \text{diag}(\dots)}_{n \times n} \\ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ m \times n \end{array} & \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ m \times m \end{array} & \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ m \times n \end{array} \\ \underbrace{\mathbf{J}_{31} = \text{diag}(\dots)}_{n \times n} & \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ n \times m \end{array} & \underbrace{\mathbf{J}_{33} = \text{diag}(\dots)}_{n \times n} \end{array} \right]$$

4 Implementierung und Simulation

4.1 Jacobi-Matrix

In der bereits implementierten Funktion für das Gleichungssystem wird die Jacobi-Matrix zusätzlich berechnet. Neben der Geometrie (Länge, Durchmesser und Knotenhöhe) wird die Knoten- und Druckdifferenzmatrix aus dem Hauptprogramm als Variablen übergeben.

```
function [F, J] = fun_system (x, qi, l, d, h, Mp, Mq)
...
% Hilfskonstanten
c1 = 2.51;
c2 = 3.7;

%% Aufstellen der Jacobi-Matrix

% J11,J13: Diagonalmatrizen; J12: entspricht Druckdifferenzmatrix
J11 = diag( -lambda .* l./d * rho .* (1./A).^2 .* abs(q) );
J12 = Mp;
J13 = diag( ( rho * l .* q .* abs(q) ) ./ ( A.^2 .* d .* f_inv_rt .^3 ) );

% J21: entspricht Knotenmatrix; J22,J23: Nullmatrizen
J21 = Mq;
J22 = zeros(Nn);
J23 = zeros(Nn,Np);

% J31: Diagonalmatrix
J31_v = -2*c1*c2 * f_inv_rt ./ ( log(10) * (rel.*Re + c1*c2*f_inv_rt).* q );
J31 = diag( J31_v );

% J32: Nullmatrix
J32 = zeros(Np,Nn);

% J33: Diagonalmatrix
J33_v = 1 + 2*c1 ./ ( log(10) * Re .* (rel./c2 + c1 * abs(f_inv_rt) ./ Re));
J33 = diag( sign(f_inv_rt) .* J33_v );

% Zusammensetzung der gesamten Jacobi-Matrix
J = [J11, J12, J13;
     J21, J22, J23;
     J31, J32, J33];
end
```

4.2 Beispielsystem 1

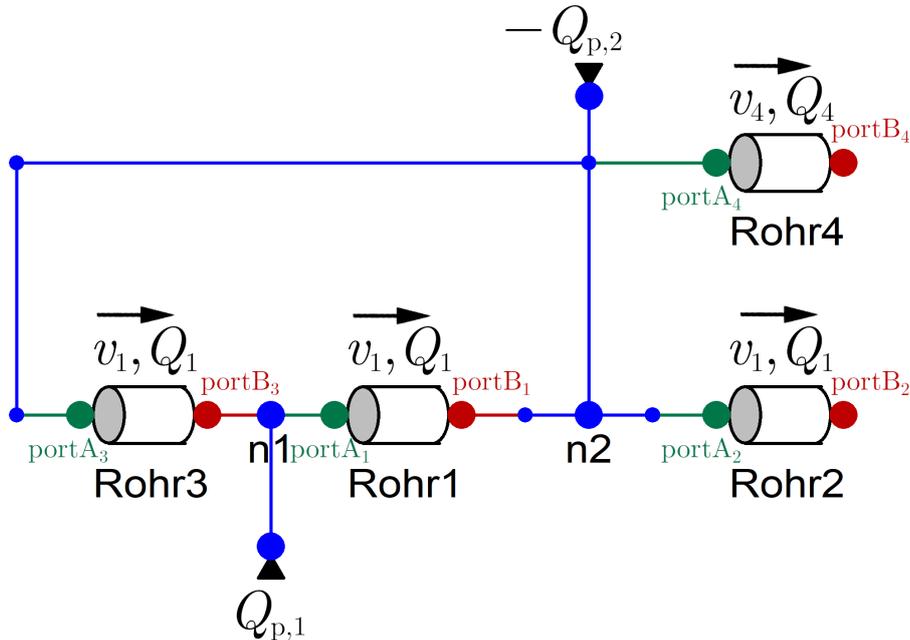


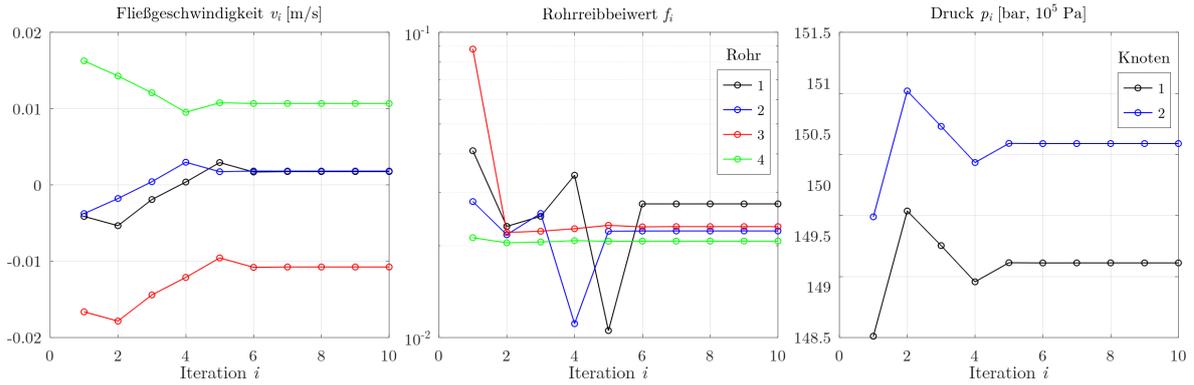
Abbildung 3.1: Beispielsystem 1

Zur Simulation des Systems nach Abbildung 3.1 wird ein Startvektor $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{f}_0)$ benötigt. Über die Umrechnung $\lambda = f^{-2}$ wird der Rohrreibbeiwert zu Beginn der Simulation festgelegt. Bis auf die Anfangsdruckwerte \mathbf{p}_0 dürfen die Volumenströme \mathbf{q}_0 nicht null sein, da sonst die Colebrook-White-Gleichung und auch die partiellen Ableitungen nicht definiert sind. Genauso darf der Vektor \mathbf{f}_0 nicht null sein, da sonst der Rohrreibbeiwert wegen f^{-2} unendlich hoch wäre.

4.2.1 Startbedingungen

Als Anfangswerte kann man beispielsweise setzen:

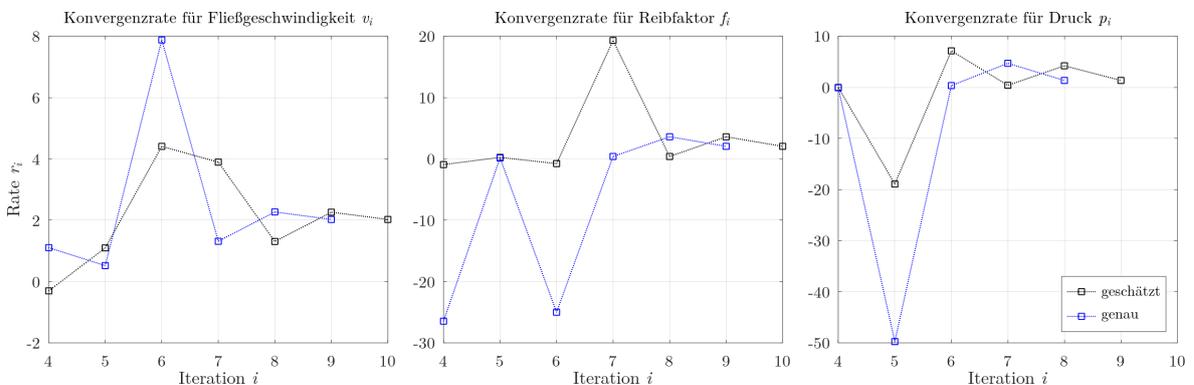
$$\mathbf{x}_0 = [(q_1 \dots q_4), (p_1, p_2), (f_1 \dots f_4)] = [10^{-2}, 0, 100], \quad \lambda_0 = 100^{-2} = 10^{-4}$$



Die Randbedingung am Ausgang von Rohr 2 und 4 entspricht einer Höhe von 500 m und einem Druck von 100 bar. Dies hat keine Auswirkung auf die Druckdifferenz zwischen Knoten 1 und 2, sondern wirkt wie ein Offset auf alle Druckwerte gleichermaßen. Die Randbedingung spielt nur bei den Druckbilanzgleichungen eine Rolle.

4.2.2 Konvergenzrate pro Iteration

Die Konvergenzrate kann für jeden Variablentyp im zu lösenden Gleichungssystem einzeln geplottet werden. Die Rate von Volumenstrom q und Fließgeschwindigkeit $v = q/A$ ist identisch, da diese Variable sich nur um einen linearen Faktor unterscheidet.



Die letzten vier Iterationen zeigen, dass die Konvergenzrate sogar größer als 1 wird. Außerdem nimmt die Funktionsnorm schnell ab, wodurch das Konvergenzkriterium mit einer Norm kleiner 10^{-6} bereits bei der 10. Iteration erreicht wird. In der Befehlsausgabe wird die Konvergenzrate separat für Volumenstrom, Druck und Rohrreibbeiwert angegeben.

Iteration: 7, Funktionsnorm = 154.857

```
v [m/s]:
  0.222 [Lambda: 0.02740]
  3.702 [Lambda: 0.02235]
 -0.342 [Lambda: 0.02309]
  5.441 [Lambda: 0.02070]
```

```

p [bar]:
    149.514
    150.492

Konvergenzrate (v,p,f) (geschätzt):      3.893,    0.392,   19.309
Konvergenzrate (v,p,f) (Lösung bekannt): 1.313,    4.694,    0.388
-----
Iteration: 8, Funktionsnorm = 0.0704205

v [m/s]:
    0.222 [Lambda: 0.02741]
    3.702 [Lambda: 0.02235]
   -0.342 [Lambda: 0.02309]
    5.441 [Lambda: 0.02070]

p [bar]:
    149.514
    150.492

Konvergenzrate (v,p,f) (geschätzt):      1.308,    4.210,    0.389
Konvergenzrate (v,p,f) (Lösung bekannt): 2.270,    1.340,    3.605
-----
Iteration: 9, Funktionsnorm = 3.37426e-06

v [m/s]:
    0.222 [Lambda: 0.02741]
    3.702 [Lambda: 0.02235]
   -0.342 [Lambda: 0.02309]
    5.441 [Lambda: 0.02070]

p [bar]:
    149.514
    150.492

Konvergenzrate (v,p,f) (geschätzt):      2.262,    1.340,    3.598
Konvergenzrate (v,p,f) (Lösung bekannt): 1.842,    NaN,     2.046
-----
Iteration: 10, Funktionsnorm = 1.30602e-09

v [m/s]:
    0.222 [Lambda: 0.02741]
    3.702 [Lambda: 0.02235]
   -0.342 [Lambda: 0.02309]
    5.441 [Lambda: 0.02070]

p [bar]:
    149.514
    150.492

Konvergenzrate (v,p,f) (geschätzt):      1.842,    NaN,     2.046
Konvergenzrate (v,p,f) (Lösung bekannt): NaN,     NaN,     NaN

```

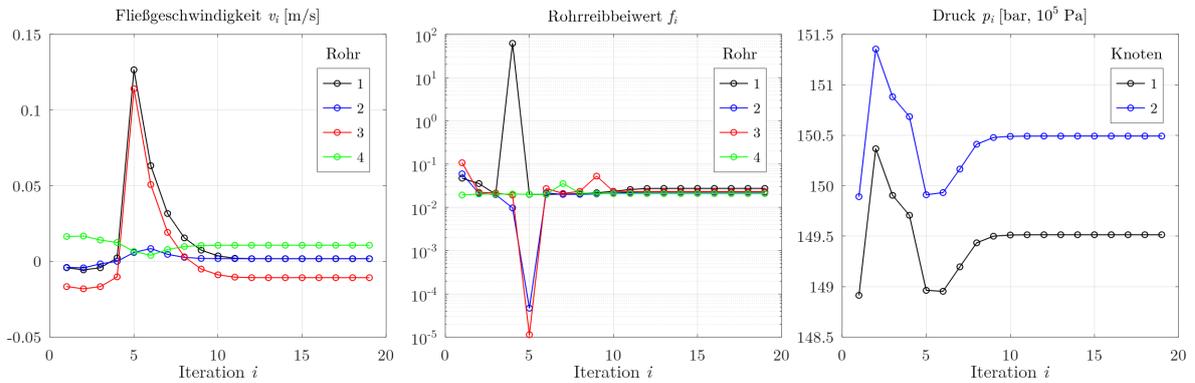
4.2.3 Simulation mit ungünstigen Anfangswerten

Ein stark unterschiedliches Verhalten tritt auf, wenn als Startwerte $(f_1 \dots f_4) = -100$ gewählt wird. Dann gilt für den Anfangsvektor

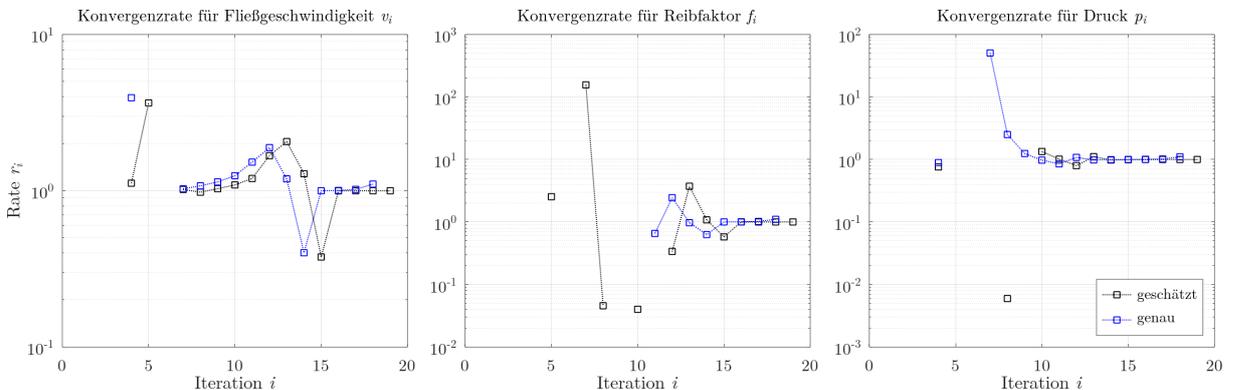
$$\mathbf{x}_0 = [(q_1 \dots q_4), (p_1, p_2), (f_1 \dots f_4)] = [10^{-2}, 0, -100], \quad \lambda_0 = (-100)^{-2} = 10^{-4}$$

Mit der Umrechnungsformel $\lambda = f^{-2}$ ergibt dies zwar den gleichen Anfangsreibungsfaktor, jedoch spielt das Vorzeichen bei den partiellen Ableitungen der Colebrook-White-Gleichung eine Rolle. Negative Werte von $f_1 \dots f_4$ sind physikalisch nicht sinnvoll, da für die Rohrreibbeiwerte nur für positive Werte ungleich null gelten. Die Wurzel des Rohrreibbeiwerts $\sqrt{\lambda}$ und auch dessen Kehrwert darf somit nie negativ oder komplex sein. Dennoch sollten solche Anfangswerte nicht zu einem Fehlverhalten der Simulation führen.

Wird die Simulation gestartet, erhält man den Verlauf wie in. Man sieht deutlich, dass bei der fünften Iteration die Fließgeschwindigkeit in Rohr 1 und 3 einen Sprung macht. Auch der Rohrreibbeiwert stabilisiert sich erst ab der fünften Iteration. Insgesamt dauert die Simulation etwas länger, weil 19 Iterationen benötigt werden. Den gleichen Effekt erhält man auch, wenn die Startwerte der Volumenströme zu groß oder klein gewählt werden.



Die Konvergenzrate fluktuiert deutlich stärker, daher wird eine logarithmische Skala verwendet. Erst ab der zehnten Iteration stabilisiert sich die Konvergenzrate für den Reibfaktor um den Wert 1. Davor sind die Konvergenzraten für Fließgeschwindigkeit, Reibfaktor und Druck teilweise negativ und im Logarithmus nicht darstellbar, was auf kurzfristige Divergenz schließen kann. Man muss jedoch anmerken, dass die Funktionsnorm, trotz einiger Sprünge zu Beginn, tendenziell abnimmt und das Verfahren insgesamt konvergiert.



In den letzten vier Iterationen stabilisiert sich die Konvergenzrate um den Wert 1 und die Funktionsnorm nimmt weiterhin kontinuierlich ab.

Iteration: 16, Funktionsnorm = 6.99752e-05

v [m/s]:
 0.222 [Lambda: 0.02741]
 3.702 [Lambda: 0.02235]
 -0.342 [Lambda: 0.02309]
 5.441 [Lambda: 0.02070]

p [bar]:
 149.514
 150.492

Konvergenzrate (v,p,f) (geschätzt): 0.999, 1.000, 1.000
 Konvergenzrate (v,p,f) (Lösung bekannt): 1.004, 1.004, 1.004

 Iteration: 17, Funktionsnorm = 1.48442e-05

v [m/s]:
 0.222 [Lambda: 0.02741]
 3.702 [Lambda: 0.02235]
 -0.342 [Lambda: 0.02309]
 5.441 [Lambda: 0.02070]

p [bar]:
 149.514
 150.492

Konvergenzrate (v,p,f) (geschätzt): 1.000, 1.000, 1.000
 Konvergenzrate (v,p,f) (Lösung bekannt): 1.020, 1.020, 1.020

 Iteration: 18, Funktionsnorm = 3.25545e-06

v [m/s]:
 0.222 [Lambda: 0.02741]
 3.702 [Lambda: 0.02235]
 -0.342 [Lambda: 0.02309]
 5.441 [Lambda: 0.02070]

p [bar]:
 149.514
 150.492

Konvergenzrate (v,p,f) (geschätzt): 1.000, 1.000, 1.000
 Konvergenzrate (v,p,f) (Lösung bekannt): 1.103, 1.103, 1.103

 Iteration: 19, Funktionsnorm = 7.15135e-07

v [m/s]:
 0.222 [Lambda: 0.02741]
 3.702 [Lambda: 0.02235]
 -0.342 [Lambda: 0.02309]
 5.441 [Lambda: 0.02070]

p [bar]:
 149.514
 150.492

Konvergenzrate (v,p,f) (geschätzt): 1.000, 1.000, 1.000
 Konvergenzrate (v,p,f) (Lösung bekannt): NaN, NaN, NaN

4.2.4 Konvergenzverhalten

Die Variablen Volumenstrom, Druck und Rohrreibbeiwert haben verschiedene physikalische Einheiten und Größenordnungen. Das gleiche gilt besonders für die Druck-, Knoten- und Colebrook-White-Gleichungen, welche nach null gelöst werden sollen. Aus diesem Grund kann man die Funktionsnorm separat für diese Gleichungssysteme betrachten, um das Konvergenzverhalten weiter zu untersuchen.

Das Abbruchkriterium der gesamten Funktionsnorm wird von 10^{-6} auf 10^{-12} abgesenkt, damit der graphische Verlauf über einen längeren Zeitlauf geht. Es fällt auf, dass die einzelnen Funktionsnormen die Konvergenzgrenzen unterschiedlich schnell unterschreiten. Die Knotengleichungen konvergieren schnell, da diese nur einfache Summenterme enthalten und außerdem unabhängig von Druck und Reibungsfaktor sind. Außerdem reagiert die gesamte Funktion, welche gelöst werden soll, unterschiedlich empfindlich auf die Variablenänderung von Druck, Volumenstrom und Rohrreibbeiwert. Man sieht auch, dass die Knotengleichungen ab der 40. Iteration minimal oszilliert. In diesem Fall gerät die Simulation an ihre numerische Grenze der Maschinenpräzision.

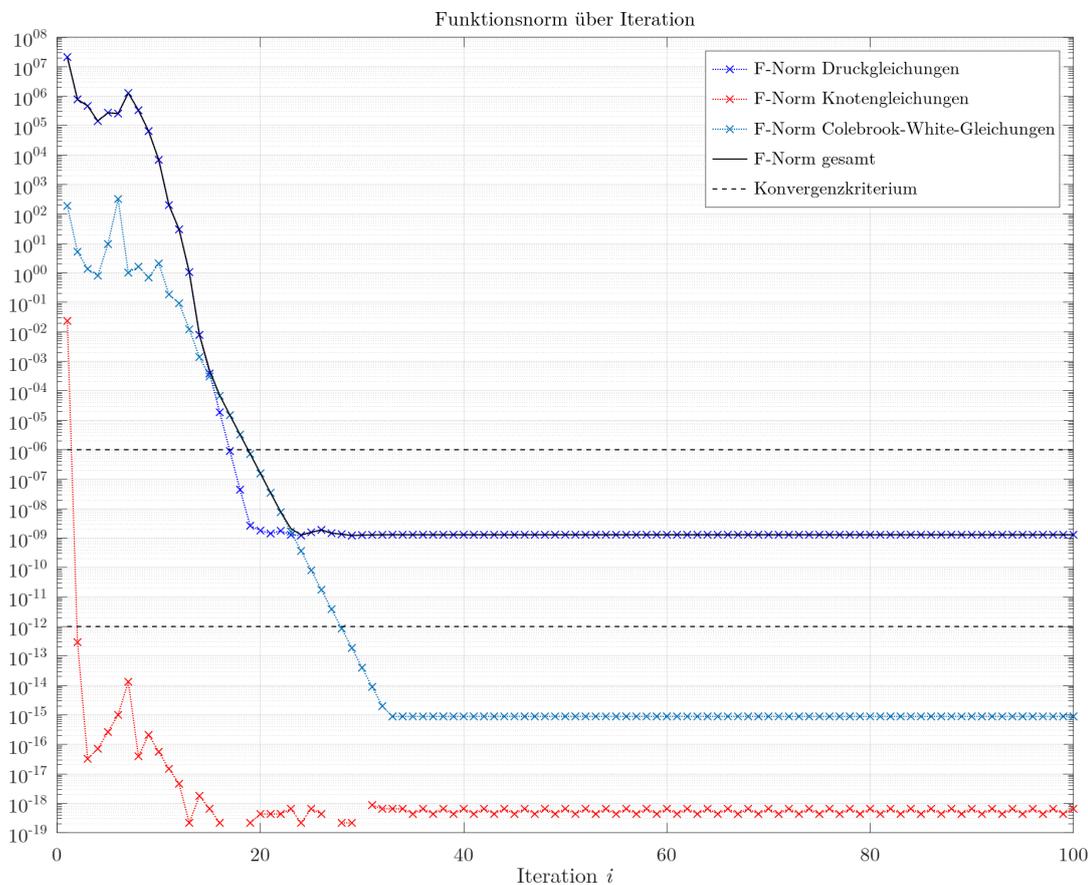


Abbildung 3.2: Grenzen des Konvergenzverhaltens

Eine Möglichkeit, die verbleibende Oszillation aufzulösen, besteht durch die Verringerung der Schrittweite. Zum Beispiel kann als Faktor $\alpha_i = 0.5$ gewählt werden, wenn sich die Funktionsnorm in der nächsten Iteration verschlechtern würde.

$$\alpha_i = \begin{cases} 0.5, & \text{wenn } \|f(x_i, c)\| > \|f(x_i - \Delta x_i, c)\| \\ 1.0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Simuliert man dies nun mit der modifizierten Schrittweite, stabilisiert sich die Funktionsnorm ab der 40. Iteration vollständig (siehe Abbildung 3.3). Die Konvergenz tritt jedoch etwas später auf, da zu Beginn bei einigen Iterationen die Schrittweite halb so groß ist. Die Ausreißer bei der Funktionsnorm wie bei der vorherigen Simulation mit fester Schrittweite sind dafür kleiner geworden.

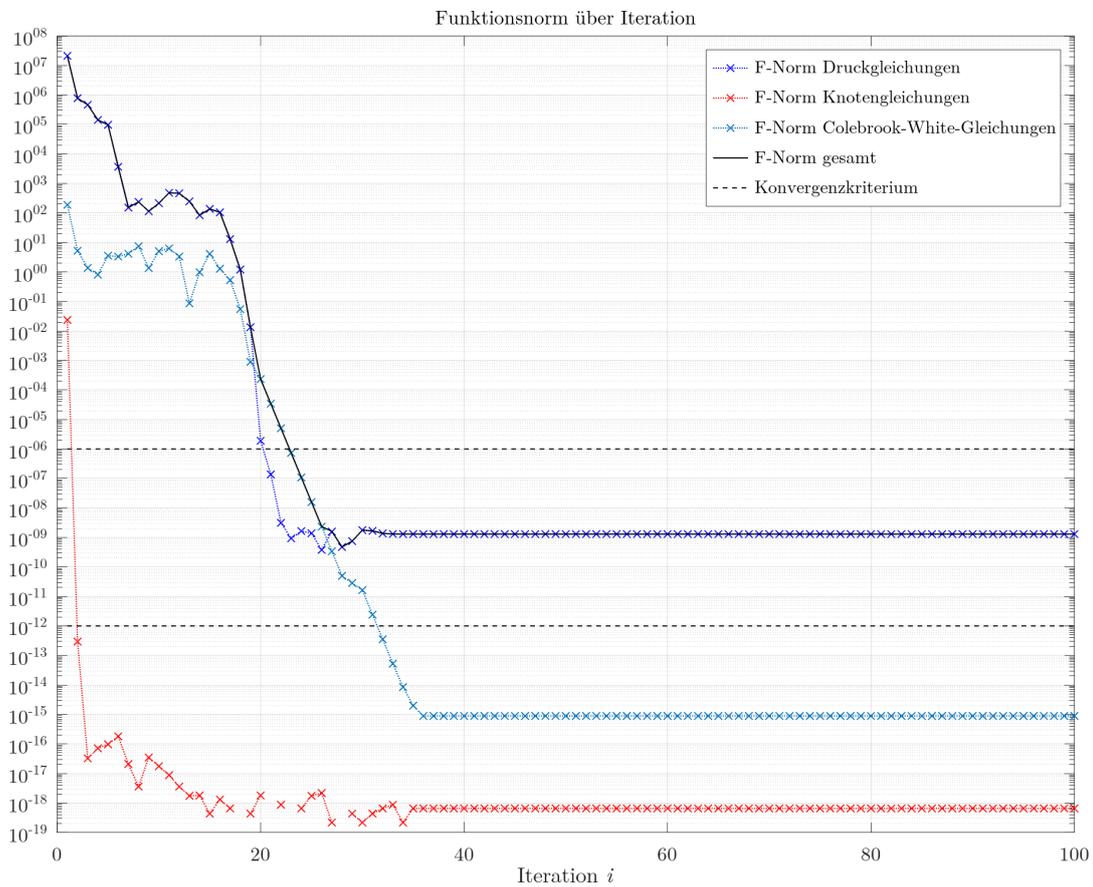


Abbildung 3.3: Konvergenzverhalten mit angepasster Schrittweite

4.2.5 Skalierung des Gleichungssystems

Das Gleichungssystem besteht aus drei Untersystemen, bestehend aus Druckgleichungen, Knotenbilanzen und Colebrook-White-Gleichungen. Diese Systeme sind über die Variablen

untereinander gekoppelt, daher kann man nicht direkt die Untersysteme einzeln lösen. Um das Problem der unterschiedlichen Skalierung der Funktionen und deren partiellen Ableitungen zu minimieren, wird die Druckvariable in der Einheit „Pascal“ durch das Produkt von Erdbeschleunigung und Dichte des Fluids geteilt. Damit lässt sich der Druck mit der Einheit „Meter“ im Gleichungssystem verwenden und später in der Lösung wieder zurück in die Einheit Pascal umrechnen. Die Gleichungen ändern sich dabei kaum, weil es sich noch um SI-Einheiten handelt. Nur die Druckgleichungen und deren partiellen Ableitungen werden durch ρg geteilt. Insgesamt werden die Druckgrößen, welche in der Einheit Pascal im Vergleich zum Volumenstrom viel größer sind, auf kleinere Zahlenwerte gebracht.

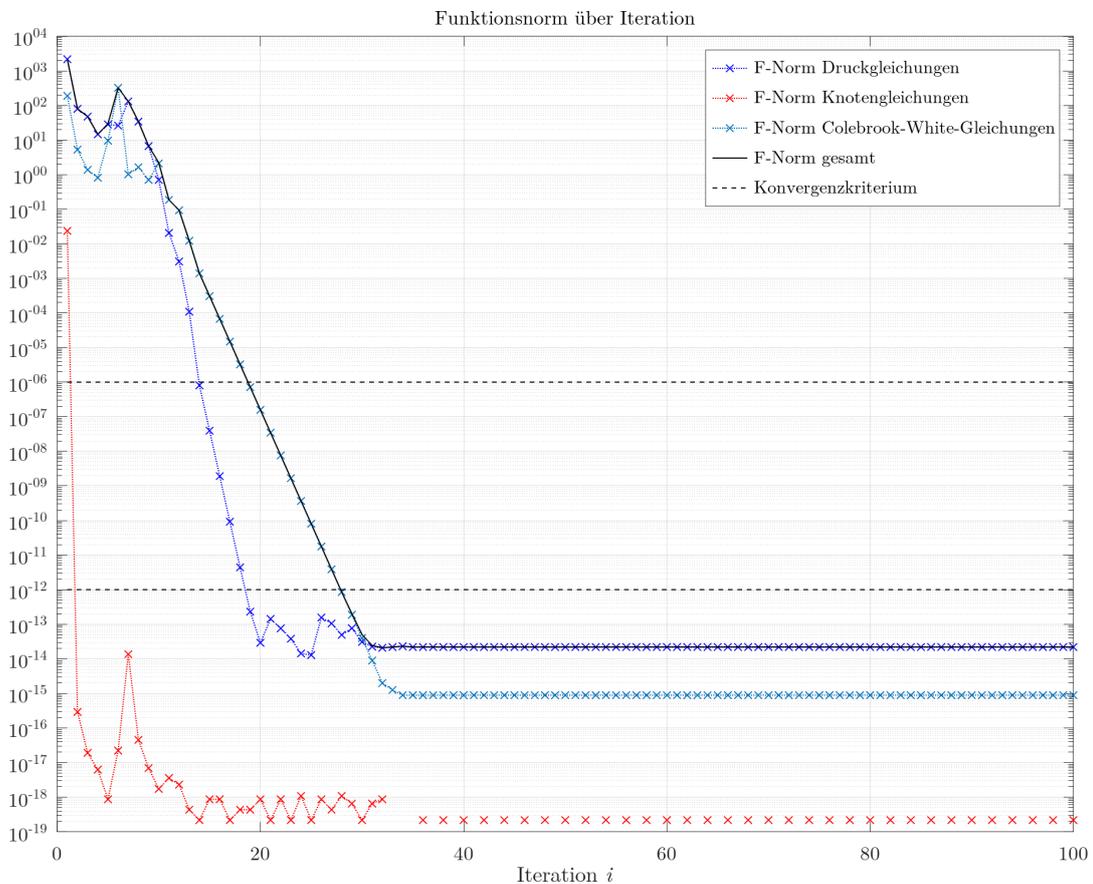


Abbildung 3.4: Verbessertes Konvergenzverhalten mit Skalierung

Wird das System mit dem modifizierten Gleichungssystem simuliert, ist vor allem bei den Druckgleichungen eine starke Verbesserung des Konvergenzverhaltens festzustellen (siehe Abbildung 3.4). Das instabile Verhalten zu Beginn ist nun geringer. Ab etwa der sechsten Iteration fällt die Funktionsnorm der Druckgleichungen logarithmisch ab, was auf eine stabile Konvergenzrate deutet. Die Steigung, also die Konvergenzgeschwindigkeit an sich, ist jedoch im Vergleich zu den vorherigen Simulationen unverändert. Die Simulation erreicht

ab etwa der 30. Iteration das kleinere Konvergenzkriterium von 10^{-12} (zum Vergleich: bei Simulation mit Druckgrößen in Pascal wird ein Limit von 10^{-9} erreicht, bevor eine Verbesserung ausbleibt).

Der Vorteil, die Druckvariable in Metern anzugeben, ist neben der Skalierung der Funktion besonders der Skalierungseffekt bei der Jacobi-Matrix. Ist die Jacobi-Matrix schlecht konditioniert, wäre die Inverse dieser Matrix wegen der begrenzten numerischen Genauigkeit bei einigen Iterationen annähernd singular. Vor allem zu Beginn der Simulation, wenn die Volumenströme noch stark von der Lösung abweichen, gibt es in der Befehlsausgabe teilweise Warnungen einer schlecht konditionierten Matrix.

In MATLAB und auch im quelloffene GNU Octave ist der Backslash-Operator $x = A \setminus b$ so implementiert, dass bei quadratischen $n \times n$ Matrizen ohne Dreiecksform entweder eine Cholesky-Zerlegung oder der Gauss-Algorithmus zur Lösung des Systems $Ax = b$ verwendet wird. So ein Gleichungssystem ist bei dem mehrdimensionalen Newton-Verfahren vorhanden, bei dem der Newtonschritt mit Lösen des Systems $\mathbf{J} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x})$ berechnet wird. Die Inverse der Jacobi-Matrix, wessen Berechnung bei großen Matrizen rechenaufwendig und bei Singularität sogar unmöglich ist, wird daher gar nicht benötigt.

Die Konditionszahl der Jacobi-Matrix ist über die Formel „ $\text{cond}(\mathbf{J}) = \|\mathbf{J}\| \cdot \|\mathbf{J}^{-1}\|$ “ definiert. In MATLAB lässt sich diese Zahl in jeder Iteration über den Befehl `cond(J)` berechnen. In der Tabelle sind beide Simulationsdurchläufe dargestellt, wobei nach der letzten Iteration das Abbruchkriterium durch die Funktionsnorm kleiner 10^{-6} erreicht ist.

In der ersten Variante werden die Druckvariablen in der Einheit Pa verwendet. Die Konditionszahl springt in der zweiten Iteration auf einen sehr hohen Wert von über 10^{16} , gleichzeitig erscheint eine Warnung in der Ausgabe, dass die Matrix schlecht konditioniert ist. Die Konditionszahl stabilisiert sich am Ende auf einen Wert von etwa 1.4×10^{15} , was zwar ein hoher Wert ist, jedoch in MATLAB noch numerisch berechenbar ist.

Bei der zweiten Variante sind die Druckvariablen in den Gleichungen bereits durch Dichte und Erdbeschleunigung geteilt worden, sodass der Druck in der Einheit m steht. Dadurch wird ein Teil der Gleichungen skaliert, ohne einen zusätzlichen Skalierungsfaktor zu verwenden. Die Konditionszahl bleibt nun kleiner als 10^9 und erreicht nahe der Lösung einen Wert von etwa 1.48×10^7 . Dies ist eine deutliche Verbesserung als bei der ersten Variante.

Tabelle 1:

Iteration	Variante 1	Variante 2
-----------	------------	------------

	(Druck in Einheit Pa)	(Druck als Flüssigkeitssäule in Einheit m)
1	$\text{cond}(J) = 1.64048 \times 10^{11}$	$\text{cond}(J) = 2.92052 \times 10^5$
2	1.25152×10^{16}	1.30878×10^8
3	4.82984×10^{15}	5.04947×10^7
4	1.33615×10^{15}	1.54327×10^7
5	2.18205×10^{14}	8.64102×10^8
6	5.79643×10^{12}	1.84828×10^5
7	3.01352×10^{15}	3.52696×10^7
8	4.24747×10^{15}	4.44088×10^7
9	1.80522×10^{15}	1.89313×10^7
10	1.38169×10^{15}	1.45783×10^7
11	1.36360×10^{15}	1.44505×10^7
12	1.39144×10^{15}	1.47417×10^7
13	1.39757×10^{15}	1.48067×10^7
14	1.39894×10^{15}	1.48210×10^7
15	1.39924×10^{15}	1.48242×10^7
16	1.39930×10^{15}	1.48248×10^7
17	1.39932×10^{15}	1.48250×10^7
18	1.39932×10^{15}	1.48250×10^7
19	1.39932×10^{15}	1.48250×10^7

4.3 Numerische Berechnung der Jacobi-Matrix

Bisher wurde das Newton-Verfahren über die exakte Jacobi-Matrix angewandt, welche in einer aufgerufenen Funktion analytisch berechnet und zurückgegeben wird. Dabei ist es entscheidend, dass die einzelnen Funktionen des Systems, bestehend aus Druckgleichungen, Knotenbilanzen und Colebrook-White-Gleichungen, zumindest einmal ableitbar sind.

Anstelle der Colebrook-White-Gleichungen können auch direkte Näherungsformeln zur Berechnung des Rohrreibbeiwerts verwendet werden. Dann sind die partiellen Ableitungen jedoch sehr aufwendig. Schließlich hängen diese Näherungen wie beispielsweise Haaland, Swamee-Jain- oder Goudar-Sonnad-Gleichung von der Reynoldszahl ab, welche wiederum vom Volumenstrom beeinflusst wird. Dadurch würden die partiellen Ableitungen nach dem Volumenstrom sehr aufwendig werden. Da der Rohrreibungsbeiwert laut Moody-Diagramm über der logarithmischen Reynoldszahl eine geringe Steigung aufweist, kann man den Wert für die partielle Ableitung wie eine Konstante behandeln. Die Druckgleichungen hängen quadratisch vom Volumenstrom ab, was in der partiellen Ableitung bei höheren Volumenströmen dominiert.

Bei Verwendung von Näherungsformeln für den Reibungsfaktor ist die Jacobi-Untermatrix \mathbf{J}_{11} zwar besonders bei geringen Volumenströmen nicht exakt, jedoch ist dies für das Newton-Verfahren ausreichend. Die Jacobi-Matrix kann auch numerisch berechnet werden. Bei geeigneter Schrittweite ist diese Berechnung teilweise genauer als die analytisch bestimmte Jacobi-Matrix, bei dem der Reibungsfaktor in der partiellen Ableitung wie eine Konstante behandelt wird.

4.3.1 Implementierung mit finiten Differenzen

Da die Jacobi-Matrix in den Spalten die partiellen Ableitungen jeweils einer Variablen enthält, wird zur Berechnung der Spalten nur eine Schleife benötigt. Die Dimension der Jacobi-Matrix muss vorher bekannt sein, daher wird die Größe vom x -Vektor und auch die Anzahl der Funktionsrückgaben von „`fun(x, c)`“ bestimmt.

Die Schrittweite sollte in der Form $h = 2^p$ sein, wobei p einen ganzzahligen Wert hat. Dadurch wird garantiert, dass es für die Schrittweite und auch für den verschobenen x -Wert eine eindeutige Darstellung im Gleitkommasystem gibt. Schließlich werden die Zahlen im Binärsystem gespeichert. Für einen Wert p von -20 erhält man beispielsweise eine Schrittweite von etwa $9.54 \cdot 10^{-7}$, welche als Minimum für die Methode der Vorwärtsdifferenzen verwendet wird.

```
% Funktion zur numerischen Berechnung der Jacobi-Matrix
function J = jacobian (fun, x, c, method)
% J:      Ausgabe der Jacobi-Matrix
% fun:    Funktionshandle für Aufruf "fun(x, c{:})"
% c:      Parameter (Pumpenvolumenströme an Knoten, Knotenmatrix, ...)
%         ist ein Cell-Array
% x:      Eingabevektor [x1, x2, .., xN]
% method: (optional), Berechnungsmethode der finiten Differenz

% Initialisiere Dimensionen
n = length(x);           % n: Anzahl der Variablen
m = length(fun(x, c{:})); % m: Anzahl der Funktionswerte

% initialisiere Jacobi-Matrix
J = zeros(m, n);

% falls keine Methode angegeben, wähle Vorwärtsdifferenzen
if nargin < 4
    method = 'forward'
endif

% Methode der finiten Differenzen wählen:
if strcmp(method, 'central')
    % Methode der zentralen Differenz
    for i=1:n
```

```

% Berechne Schrittweite abhängig von Variable x(i)
% minimale Schrittweite von h = eps (float Präzision)
h = eps * ( 1.0 + abs(x(i)) );

% Exponent 2^p finden
p = log(h) / log(2);

% Schrittweite in Form h = 2^(..) umwandeln
% minimale Schrittweite von h = 2^-20
h = 2 ^ max( round(p), -20 );

% Kopiere x-Vektor
xh1 = x;
xh2 = x;

% Hilfsvektoren um +/-h verschieben
xh1(i) = xh1(i) + h; % vorwärts
xh2(i) = xh2(i) - h; % rückwärts

% evaluiere Funktionswerte F(...)
f1 = fun(xh1, c{:}); % F(x + h)
f2 = fun(xh2, c{:}); % F(x - h)

% partielle Ableitung dF/dx(i) berechnen
df = (f1 - f2) / (2*h);

% Ableitungsvektor in die i. Spalte von Jacobi-Matrix
J(:,i) = df;
end
else
% Methode der Vorwärtsdifferenz (Standard)
for i=1:n
% Berechne Schrittweite abhängig von Variable x(i)
% minimale Schrittweite von h = eps (float Präzision)
h = eps * ( 1.0 + abs(x(i)) );

% Exponent 2^p finden
p = log(h) / log(2);

% Schrittweite in Form h = 2^(..) umwandeln
% minimale Schrittweite von h = 2^-26
h = 2 ^ max( round(p), -26 );

% Kopiere x-Vektor
xh = x;

% Hilfsvektor um +h verschieben
xh(i) = xh(i) + h;

% evaluiere Funktionswerte F(...)
f1 = fun(xh, c{:}); % F(x + h)
f2 = fun(x, c{:}); % F(x)

% partielle Ableitung dF/dx(i) berechnen
df = (f1 - f2) / h;

% Ableitungsvektor in die i. Spalte von Jacobi-Matrix
J(:,i) = df;
end
end
end

```

4.3.2 Numerisches Beispiel

Die Jacobi-Untermatrix \mathbf{J}_{11} hängt mit Verwendung der Näherungsformeln für den Rohrreibbeiwert nur vom Volumenstrom als Variable ab, die restlichen Bestandteile sind statisch und über den Systemaufbau definiert. Bei der numerischen Berechnung werden die finiten Differenzen aller Gleichungen berücksichtigt, daher ist es möglich, dass die konstanten Werte $(-1,0,1)$ in der Jacobi-Matrix wegen der begrenzten numerischen Genauigkeit etwas abweichen.

$$\mathbf{J}_{\text{approx}}(q_1, q_2 = 0,01) = \begin{bmatrix} -3,4809 \cdot 10^5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3,3415 \cdot 10^8 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{\text{numeric}}(q_1, q_2 = 0,01) = \begin{bmatrix} -3,3484 \cdot 10^5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3,3005 \cdot 10^8 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Für höhere Volumenströme nimmt die Abweichung in den beiden Diagonalelementen links oben ab. Dies liegt daran, dass die Näherung der Jacobi-Matrix, bestehend aus der partiellen Ableitung mit konstantem Rohrreibbeiwert, für stärkere Turbulenz genauer wird. Der Rohrreibbeiwert ändert sich bei sehr hohen Reynoldszahlen kaum noch, sodass die Ableitung des Rohrreibbeiwert nach dem Volumenstrom nahezu null ist.

$$\mathbf{J}_{\text{approx}}(q_1, q_2 = 1) = \begin{bmatrix} -3,1834 \cdot 10^5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3,2572 \cdot 10^8 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{\text{numeric}}(q_1, q_2 = 1) = \begin{bmatrix} -3,1817 \cdot 10^5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3,2568 \cdot 10^8 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.4 Erweiterung für laminaren Fall

Bisher wurde angenommen, dass die Strömung turbulent ist. Jedoch gelten die Gesetzmäßigkeiten wie die Colebrook-White-Gleichung nur für eine Reynoldszahl von 4000, also für

eine vollständig ausgeprägte Turbulenz. Unterhalb von einer Reynoldszahl von 2320 ist die Strömung laminar [3]. Im Zwischenbereich ist die Strömung weder vollständig turbulent noch laminar, sondern weist ein Übergangsverhalten auf. Die Ergebnisse in der Simulation sind bei einer Reynoldszahl zwischen 2320 und 4000 kritisch zu betrachten, wenn bereits für eine Reynoldszahl von größer 2320 mit der Colebrook-White-Gleichung gearbeitet wird.

4.4.1 Druckgleichungen

Ist die kleinste Reynoldszahl bei einer Iteration größer 2320, kann wie bereits gezeigt mit Vektoroperationen gerechnet werden. Falls dagegen einer der Reynoldszahlen kleiner ist, wird eine Fallunterscheidung mit einer separaten for-Schleife benötigt.

Die Formel für den Druckverlust bei Reibung für eine turbulente Strömung gilt auch bei einer laminaren Strömung. Der Rohrreibbeiwert λ muss dafür modifiziert werden.

$$h_{\text{reib}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{1}{2g} \frac{1}{A^2} |q| \cdot q, \quad h_{\text{reib}} = \frac{p_{\text{reib}}}{\rho g}$$

Der Rohrreibbeiwert λ ist beim laminaren Fall über $\lambda = 64/Re$ gegeben und muss daher nicht mehr implizit über ein Gleichungssystem berechnet werden. Für die Reynoldszahl ist eine Formel vorhanden, in welcher der Volumenstrom als Variable steht.

$$h_{\text{reib}} = \frac{64}{Re} \frac{l}{d} \frac{1}{2g} \frac{1}{A^2} |q| \cdot q, \quad Re = \frac{\rho d}{\eta A} |q|$$

Nach Einsetzen der Reynoldszahl kürzt sich der Betrag des Volumenstroms.

$$h_{\text{reib}}(q) = 32 \frac{\eta}{\rho g} \frac{l}{d^2} \frac{1}{A} q$$

Für ein kreisrundes Rohr mit Querschnitt $A = 0,25\pi d^2$ vereinfacht sich die Formel zu

$$h_{\text{reib}}(q) = \frac{128}{\pi} \frac{\eta}{\rho g} \frac{l}{d^4} q$$

Da die Druckbilanz für ein Rohr mit $F = \Delta p_{[m]} + \Delta h - h_{\text{Reib}}$ gilt, ändern sich in diesem Fall die Matrizen \mathbf{J}_{11} und \mathbf{J}_{13} in der Jacobi-Matrix. Matrix \mathbf{J}_{13} hat ein Nullelement auf der Diagonalen, falls der laminare Fall gilt. In den zutreffenden Diagonalelementen von \mathbf{J}_{11} stehen die partiellen Ableitungen bezüglich des Volumenstroms, für welche nun gilt:

$$\frac{\partial}{\partial q} F_1(q) = -\frac{\partial}{\partial q} h_{\text{reib}}(q) = -32 \frac{\eta}{\rho g} \frac{l}{d^2} \frac{1}{A} = -\frac{128}{\pi} \frac{\eta}{\rho g} \frac{l}{d^4}$$

Es gibt im laminaren Fall hier keine Problemstelle, wenn der Volumenstrom null ist. Die Ableitung und Funktionswert ist für den ganzen Wertebereich, auch negative Werte, berechenbar. Mithilfe der Druckgleichungen F_1 und Knotenbilanzen F_2 kann das System bereits gelöst werden. Da der Löser jedoch die Variablen für den Rohrreibbeiwert erwartet, kann die Struktur des Gleichungssystem nicht einfach reduziert werden. Dies wäre problematisch, da die Variablen für den Rohrreibbeiwert ins Unendliche laufen würden.

Es muss also eine weitere Gleichung F_3 aufgestellt werden, um den Rohrreibbeiwert zu bestimmen. Der Zusammenhang $\lambda = 64/Re$ lässt sich umschreiben, indem beide Seiten invertiert und dann die Wurzel gezogen wird.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{8} \sqrt{Re}$$

Stellt man den Term auf der rechten Seite zur linken Seite um, ergibt dies eine Gleichung, die eine Lösung besitzt. Die Wurzelinverse vom Rohrreibbeiwert ist die Variable, welche gelöst werden soll. Dies Struktur dieser neuen Gleichung ist konsistent zum turbulenten Fall, bei der die Colebrook-White-Gleichung benutzt wird.

$$F_3 = \lambda_{(\text{inv,rt})} - \frac{1}{8} \sqrt{Re}, \quad \text{mit } \lambda_{(\text{inv,rt})} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Zur Bestimmung der Jacobi-Matrix \mathbf{J}_{11} wird die Formel für die Reynoldszahl eingesetzt.

$$F_3 = \lambda_{(\text{inv,rt})} - \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\rho d}{\eta A}} \sqrt{|q|}$$

Die partielle Ableitung bezüglich des Volumenstrom lautet nach Anwenden von Ketten- und Produktregel:

$$\frac{\partial}{\partial q} F_3 = -\frac{1}{16} \sqrt{\frac{\rho d}{\eta A}} |q|^{-\frac{1}{2}} \frac{q}{|q|} = -\frac{1}{16} \sqrt{\frac{\rho d}{\eta A q}} \text{sgn}(q)$$

Das Diagonalelement von \mathbf{J}_{11} kann nun bestimmt werden. Um Teilen durch null zu vermeiden, wird die Maschinengenauigkeit „eps“ (auch bekannt als Epsilon ε) auf den Volumenstrom aufaddiert. Dadurch müsste der Volumenstrom exakt $-\varepsilon$ betragen, um einen „Division by zero“ Fehler zu erhalten.

In der Vorzeichenfunktion „sgn (...)“ wird die Maschinengenauigkeit aufaddiert, damit das Ergebnis nicht exakt null beträgt und ein Fehler auftritt. Ansonsten würde ein Anfangswert von null für den Volumenstrom keine Lösung ergeben.

$$\mathbf{J}_{11}(i, i) = -\frac{1}{16} \sqrt{\frac{\rho d}{\eta A (q + \text{eps})}} \text{sgn}(q + \text{eps}), \quad \text{eps} \approx 2,2204 \cdot 10^{-16} \text{ (typisch)}$$

Die Jacobi-Matrix \mathbf{J}_{13} hat als Diagonalelement an der Stelle einen Wert von 1, bei der eine laminare Strömung vorliegt. Dies ist der Fall, da die partielle Ableitung der Gleichung $\frac{\partial F_3}{\partial \lambda_{(\text{inv}, \text{rt})}} = 1$ beträgt. Damit die Variable für die Inverse vom Rohrreibbeiwert nicht ins

Unendliche läuft, wird die Reynoldszahl in der Funktion F_3 begrenzt. Dadurch ist die größtmögliche Lösung für λ der Wert 64.

$$F_3 = \lambda_{(\text{inv}, \text{rt})} - \frac{1}{8} \sqrt{\max(\text{Re}, 1)}, \quad \text{mit } \lambda_{(\text{inv}, \text{rt})} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

4.4.2 Implementierung

Die Funktion, in welcher das Gleichungssystem und die Jacobi-Matrix aufgestellt, wird nun modifiziert. Für den Fall, dass die kleinste Reynoldszahl größer 2320 ist, wird wie bereits gezeigt die Formeln vektorweise aufgestellt. Falls jedoch die kleinste Reynoldszahl im laminaren Bereich liegt, werden die Funktionswerte und Einträge der Jacobi-Matrix elementweise berechnet (blau markierter Code). Für jedes Rohr wird überprüft, ob die Strömung laminar ist, und so die passenden Formeln verwendet.

```

if min(Re) >= 2320 % Falls keine Strömung laminar
% Rohrreibbeiwert berechnen
lambda = (1./f_inv_rt) .^2;

% Bernoulli: statische Drücke (durch rho*g geteilt) + Höhendifferenz
F(1:Np) = Dp + Dh;

% Bernoulli: Zusammensetzung mit Reibungsverlusten
F(1:Np) -= ( lambda .* l./d * 1/(2*g) .* (1./A).^2 .* abs(q) .* q )';
% Colebrook-White-Gleichung
F(Np+1:end) = abs(f_inv_rt) + 2 * log10(rel./c2 + c1*abs(f_inv_rt)./Re);

% Zurück zum Hauptprogramm, wenn keine Jacobi-Matrix angefordert wurde
if nargin == 1
return
end

% J11, J13: Diagonalmatrizen

```

```

J11 = diag( -lambda .* l./d * 1/g .* (1./A).^2 .* abs(q) );
J13 = diag( ( 1/g * l .*q .* abs(q) ) ./ ( A.^2 .* d .* f_inv_rt .^3 ) );

% J31: Diagonalmatrix
J31_v = -2*c1*c2 * f_inv_rt ./ (log(10) * (rel.*Re + c1*c2*f_inv_rt) .* q);
J31 = diag( J31_v );

% J33: Diagonalmatrix
J33_v = 1 + 2*c1 ./ ( log(10) * Re .* (rel./c2 + c1 * abs(f_inv_rt) ./ Re));
J33 = diag(sign(f_inv_rt) .* J33_v );
else % mindestens eine Strömung ist laminar
% Initialisiere Diagonalmatrizen (wenn angefordert)
if nargout == 2
    J13 = zeros(Np);
    J31 = zeros(Np);
    J33 = zeros(Np);
end

% Bernoulli: statische Drücke (durch rho*g geteilt) + Höhendifferenz
F(1:Np) = Dp + Dh;

for i = 1:Np
    if Re(i) > 2320 % Falls nicht laminar
        lambda = 1 / ( f_inv_rt(i) * f_inv_rt(i) );
        F(i) -= ( lambda * l/d(i) * 1/(2*g) * (1/A(i))^2 * abs(q(i)) * q(i) )';

        % Colebrook-White-Gleichung
        F(Np+Nn+i) = abs( f_inv_rt(i) ) + ...
            2 * log10 (rel./c2 + c1 * abs( f_inv_rt(i) ) / Re(i) );

        % Sofort nächster Schleifenlauf, wenn keine Jacobi-Matrix angefordert
        if nargout == 1
            continue
        end

        % Diagonalelemente der Jacobi-Untermatrizen
        J11(i,i) = -lambda * l/d(i) * 1/g * 1/A(i)^2 * abs(q(i));
        J13(i,i) = 1/g * l * q(i) * abs(q(i)) / (A(i)^2 * d(i) * f_inv_rt(i)^3);

        J31(i,i) = -2 * c1*c2 * f_inv_rt(i) / ...
            ( log(10) * ( rel*Re(i) + c1*c2*f_inv_rt(i) ) * q(i) );
        J33(i,i) = 1 + 2*c1 / ...
            ( log(10)*Re(i)*( rel/c2 + c1*abs(f_inv_rt(i)) / Re(i) ) );
        J33(i,i) = J33(i,i) * sign(f_inv_rt(i));
    else % Falls laminar
        % Druckverlust bei laminarer Strömung (geteilt durch rho*g)
        F(i) -= 128 / pi * eta / (rho * g) * l / d(i)^4 * q(i);

        % Zusammenhang Rohrreibbeiwert und Reynoldszahl (laminar)
        F(Np+Nn+i) = f_inv_rt(i) - sqrt(max(Re(i),1)) / 8;

        % Sofort nächster Schleifenlauf, wenn keine Jacobi-Matrix angefordert
        if nargout == 1
            continue
        end

        % Diagonalelemente der Jacobi-Untermatrizen
        J11(i,i) = - 128 / pi * eta / (rho * g) * l/d(i)^4;
        J31(i,i) = - sign(q(i)) * sqrt( rho * d(i) / (A(i) * eta) ) /...
            ( 16 * sqrt( abs(q(i)) + eps) ) );
        J33(i,i) = 1;
    end
end

```

```

end
end

% Zurück zum Hauptprogramm, wenn keine Jacobi-Matrix angefordert wurde
if nargin == 1
    return
end

% J12: entspricht Druckdifferenzmatrix
J12 = Mp;

% J21: entspricht Knotenmatrix; J22,J23,J32: Nullmatrizen
J21 = Mq;
J22 = zeros(Nn);
J23 = zeros(Nn,Np);
J32 = zeros(Np,Nn);

% Zusammensetzung der gesamten Jacobi-Matrix
J = [J11, J12, J13;
     J21, J22, J23;
     J31, J32, J33];

```

Wird die Jacobi-Matrix numerisch bestimmt, werden die entsprechenden Codeteile für die Berechnung der Jacobi-Matrixeinträge übersprungen und nur die Funktionswerte werden dem Hauptprogramm zurückgegeben. So werden unnötige Berechnungen vermieden.

5 Verifikation

5.1 Beispielsystem 1

Zur Überprüfung des modifizierten Algorithmus wird erneut das Beispiel mit vier Rohren und zwei Knoten verwendet. Der Pumpenvolumenstrom $Q_{in} = 12,5$ l/s wird um den Faktor 100 auf $Q_{in} = 0,125$ l/s reduziert. Die Rohrlänge beträgt 10 m und die Durchmesser der Rohre als Vektor $d = [100, 25, 200, 50]$ mm.

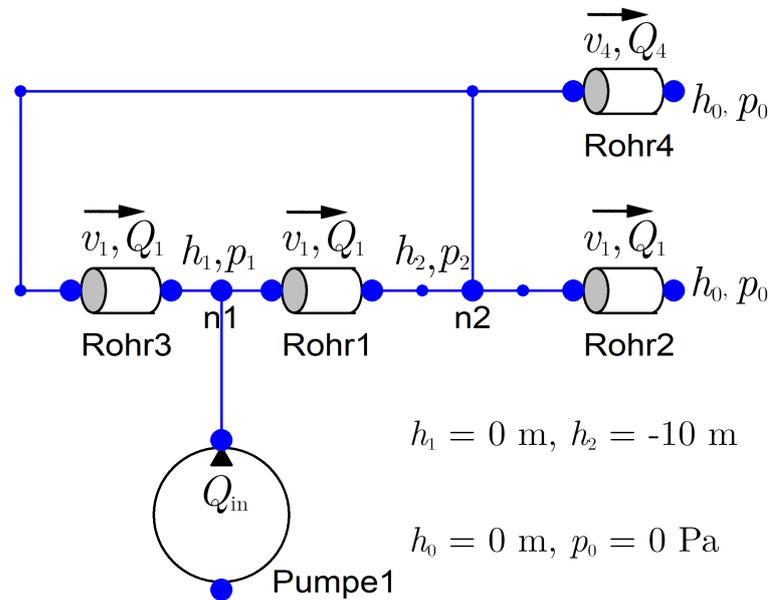


Abbildung 4.1: Modell mit vier Rohren und zwei Knoten

Die Anfangswerte können auf null gesetzt werden, da so die Formeln für laminare Strömung gelten. Bei diesen Gleichungen treten keine Fehler wie „division by zero“ auf. Wird nun die Simulation durchlaufen, kann bei den letzten drei Iterationen eine schnelle Abnahme der Funktionsnorm (hier Konvergenz unter 10^{-12}) beobachtet werden.

Iteration: 10, Funktionsnorm = 1.71632e-05

```

v [m/s]:
    0.001 [Lambda: 0.68567, Re: 93.34]
    0.028 [Lambda: 0.09100, Re: 703.28]
   -0.004 [Lambda: 0.08571, Re: 746.72]
    0.057 [Lambda: 0.04522, Re: 2821.91]

p [bar]:
    0.000
    0.978
    
```

 Iteration: 11, Funktionsnorm = 4.66126e-12

```

v [m/s]:
  0.001 [Lambda: 0.68567, Re: 93.34]
  0.028 [Lambda: 0.09100, Re: 703.28]
 -0.004 [Lambda: 0.08571, Re: 746.72]
  0.057 [Lambda: 0.04522, Re: 2821.91]

p [bar]:
  0.000
  0.978

```

Iteration: 12, Funktionsnorm = 1.30509e-15

```

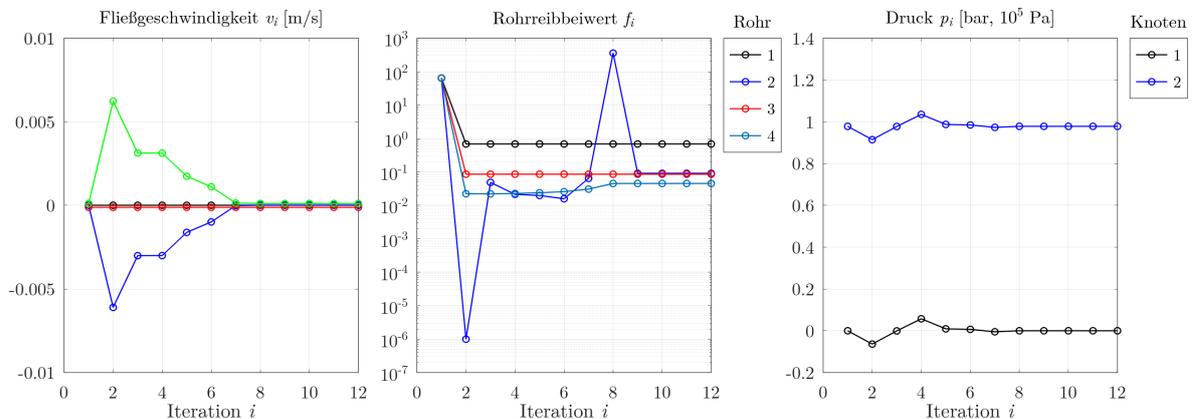
v [m/s]:
  0.001 [Lambda: 0.68567, Re: 93.34]
  0.028 [Lambda: 0.09100, Re: 703.28]
 -0.004 [Lambda: 0.08571, Re: 746.72]
  0.057 [Lambda: 0.04522, Re: 2821.91]

p [bar]:
  0.000
  0.978

```

Die Reynoldszahl für das vierte Rohr liegt mit etwa 2821 im Bereich, bei dem die Formeln für eine turbulente Strömung verwendet werden. Für den Löser ist es also möglich, sowohl laminare als auch turbulente Strömungen gleichzeitig zu behandeln.

Es fällt auf, dass die Druckwerte bereits nach der ersten Iteration in der richtigen Größenordnung und nahe der Lösung liegen. Die Fließgeschwindigkeiten laufen zuerst entgegengesetzt, bevor diese in Richtung der Lösung (siehe obere Ausgabe) zurückfallen.



5.1.1 Grenzregion der Reynoldszahl

Wird der Volumenstrom in den Knoten 1 auf $Q_{\text{in}} = 1,25$ l/s (Faktor 10) erhöht, passiert ein besonderer Effekt. Die Strömungsgeschwindigkeit und der Rohrreibbeiwert verändern sich, zumindest bei Rohr 1 und 3, periodisch zwischen zwei Werten. Der Druck bleibt dagegen unbeeinflusst.

```

Iteration: 98, Funktionsnorm = 1.27868

v [m/s]:
  0.029 [Lambda: 0.02126, Re: 2933.17]
  0.345 [Lambda: 0.03355, Re: 8599.29]
 -0.032 [Lambda: 0.03598, Re: 6467.29]
  0.550 [Lambda: 0.02637, Re: 27435.85]

p [bar]:
  0.008
  0.986
-----
Iteration: 99, Funktionsnorm = 2.43435

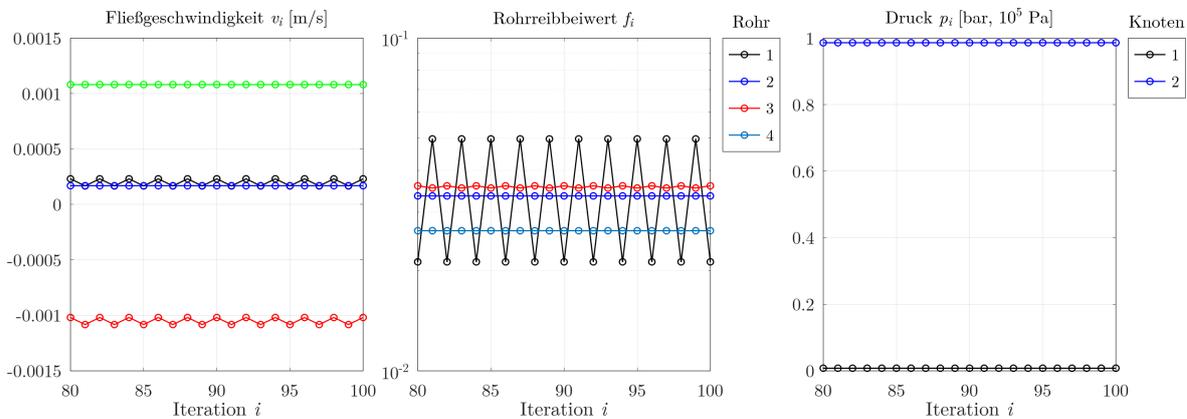
v [m/s]:
  0.021 [Lambda: 0.04977, Re: 2124.18]
  0.345 [Lambda: 0.03355, Re: 8599.29]
 -0.034 [Lambda: 0.03543, Re: 6871.78]
  0.550 [Lambda: 0.02637, Re: 27435.85]

p [bar]:
  0.008
  0.986
-----
Iteration: 100, Funktionsnorm = 1.27868

v [m/s]:
  0.029 [Lambda: 0.02126, Re: 2933.17]
  0.345 [Lambda: 0.03355, Re: 8599.29]
 -0.032 [Lambda: 0.03598, Re: 6467.29]
  0.550 [Lambda: 0.02637, Re: 27435.85]

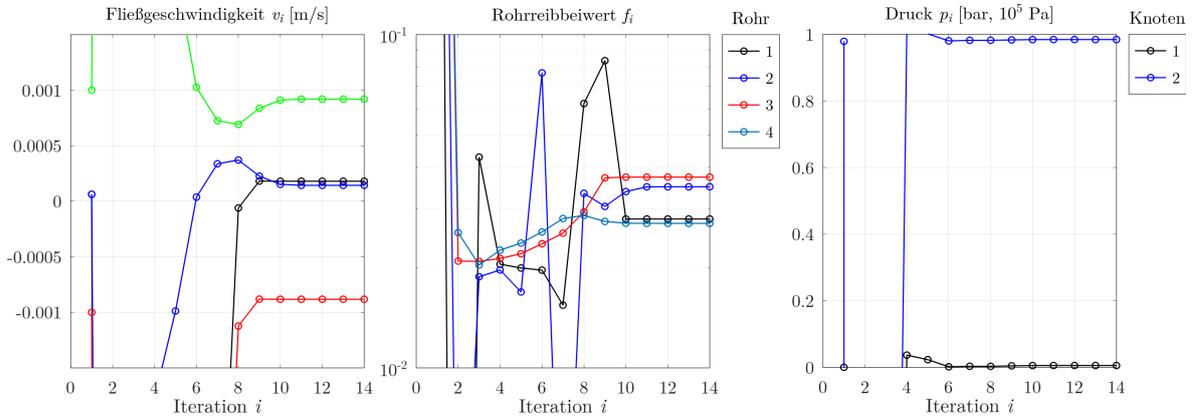
p [bar]:
  0.008
  0.986

```



Diese Instabilität tritt in der Simulation nur auf, wenn eine der Reynoldszahlen zu nahe an der Grenze von laminarer zu turbulenter Strömung liegt. An dieser Grenze ändern sich die partiellen Ableitungen innerhalb der Jacobi-Matrix abrupt, da andere Gleichungen verwendet werden. Ob die Jacobi-Matrix numerisch oder exakt berechnet wird, bewirkt keine Änderung des Verhaltens.

Eine Erhöhung oder Verringerung des Pumpenvolumenstrom um einen kleinen Wert bewirkt jedoch, dass die Lösung konvergiert. Beispielsweise kann mit einem Wert von $Q_{in} = 1,0625$ l/s Konvergenz wieder erreicht werden.



Zu Beginn können die Variablen deutlich schwanken, weil der laminar-turbulenter Übergang den Lösungsprozess beeinflusst. Die Achsen im Diagramm wurden zum Vergleich genau wie beim instabilen Fall skaliert. Ab der 10. Iteration stabilisiert sich das Verhalten. Die letzten beiden Iterationen können aus der Befehlsausgabe in Werten angegeben werden. Man sieht, dass die Reynoldszahl für Rohr 1 knapp unterhalb der Grenze von 2320 liegt.

```
Iteration: 13, Funktionsnorm = 6.08545e-08

v [m/s]:
  0.023 [Lambda: 0.02797, Re: 2288.09]
  0.292 [Lambda: 0.03495, Re: 7271.72]
 -0.028 [Lambda: 0.03736, Re: 5599.75]
  0.468 [Lambda: 0.02714, Re: 23339.31]

p [bar]:
  0.006
  0.984

Konvergenzrate (v,p,f) (geschätzt):      1.980,   2.457,   2.693
Konvergenzrate (v,p,f) (Lösung bekannt): 1.787,   1.109,   1.546
-----
Iteration: 14, Funktionsnorm = 2.58574e-15

v [m/s]:
  0.023 [Lambda: 0.02797, Re: 2288.09]
  0.292 [Lambda: 0.03495, Re: 7271.72]
 -0.028 [Lambda: 0.03736, Re: 5599.75]
  0.468 [Lambda: 0.02714, Re: 23339.31]

p [bar]:
  0.006
  0.984

Konvergenzrate (v,p,f) (geschätzt):      1.787,   1.109,   1.546
```

5.1.2 Simulation in DSHplus

In der Software DSHplus 3.14 vom Hersteller Fluidon, für den personellen Gebrauch mit reduzierter Bauelementzahl kostenfrei verwendbar, werden ähnliche Ergebnisse erzielt. Die Simulation in Abbildung 4.2 ist jedoch transient, weshalb Dynamiken im System wie hochfrequente Schwingungen im Plot zu sehen sind. Nach einer Simulationsdauer von etwa 15 s ist das System eingeschwingen, wobei die simulierte Zeitperiode 1000 s beträgt.

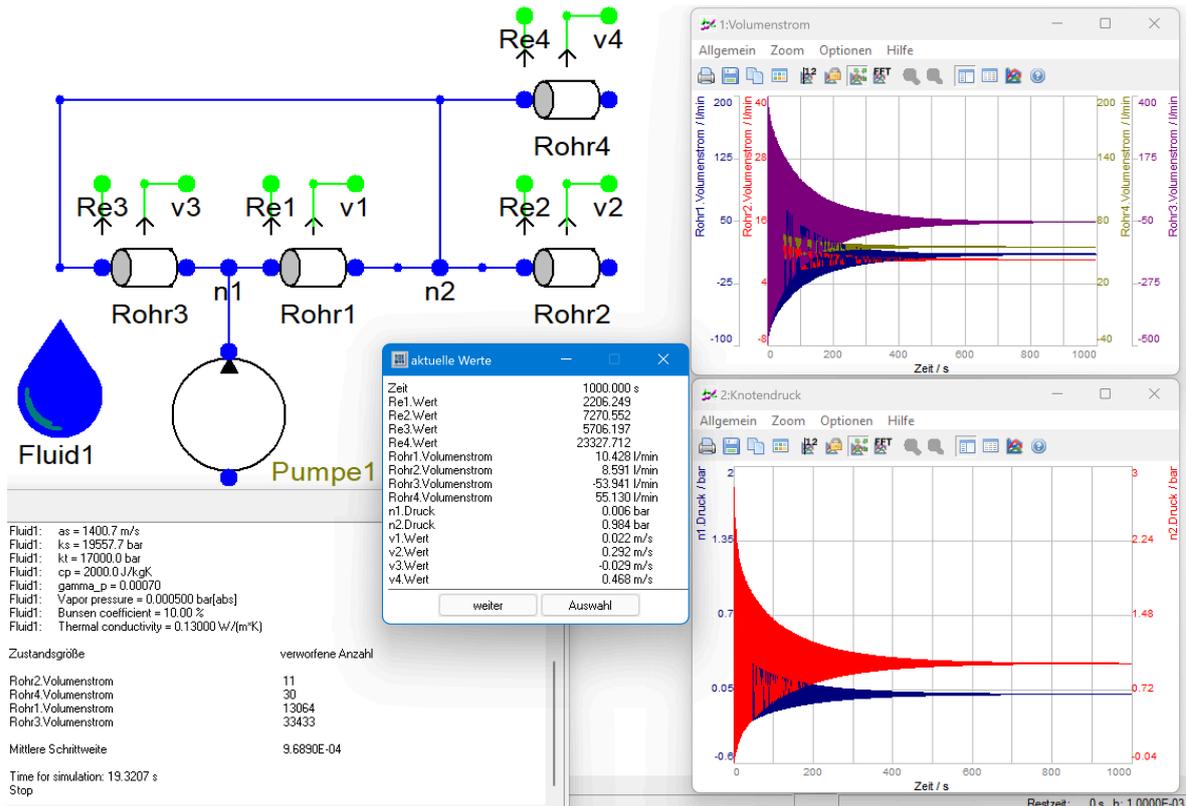


Abbildung 4.2: Simulationslauf in DSHplus (Beispiel 1)

Die Simulationsparameter können wie in Abbildung 4.3 eingestellt werden, wobei die Schrittweite variabel ist. Es stehen sowohl explizite (ode23, ode45, Dormand-Prince 45) als auch implizite Löser (Euler, Rosenbrock, Radau) zur Auswahl, wobei diese auf das Runge-Kutta-Verfahren basieren und die Ordnung jeweils aufsteigend ist.

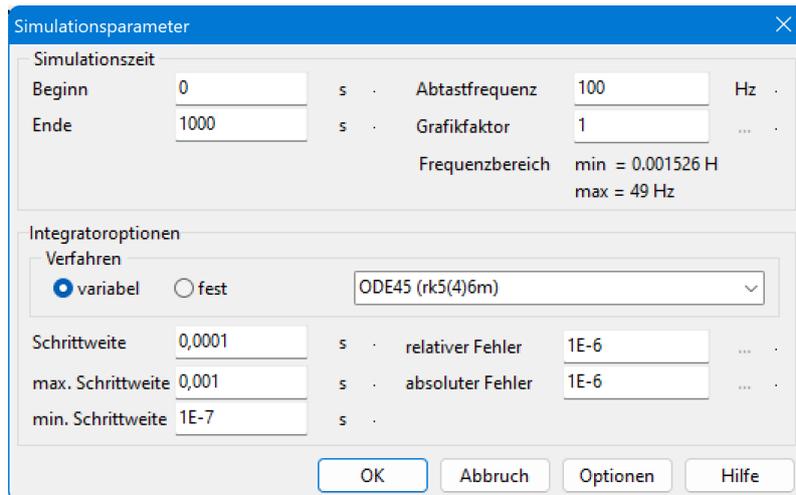


Abbildung 4.3: Simulationsparameter in DSHplus

5.1.3 Simulation in Simscape Fluids

Matlab bietet mit Simulink eine Oberfläche für „Model-Based“ Design an, bei denen Blockdiagramme genutzt werden können. In der Variante „Simscape“ können auch hydraulische Komponenten simuliert werden. In Abbildung 4.4 ist das vorherige Beispielsystem inklusive Signalkomponenten zu sehen.

Die Parameter können als Variablen hinterlegt und in einem eigenen Fenster verändert werden. Zwischen Leitung 1 und 3 wird über die Pumpe „Flow Source 1“ am verbundenen Knoten ein konstanter Volumenstrom von 1,0625 Litern pro Sekunde eingespeist. Die Pumpe „Flow Source 2“ ist hier auf einen Variablenwert „qzu2“ von 0 gesetzt.

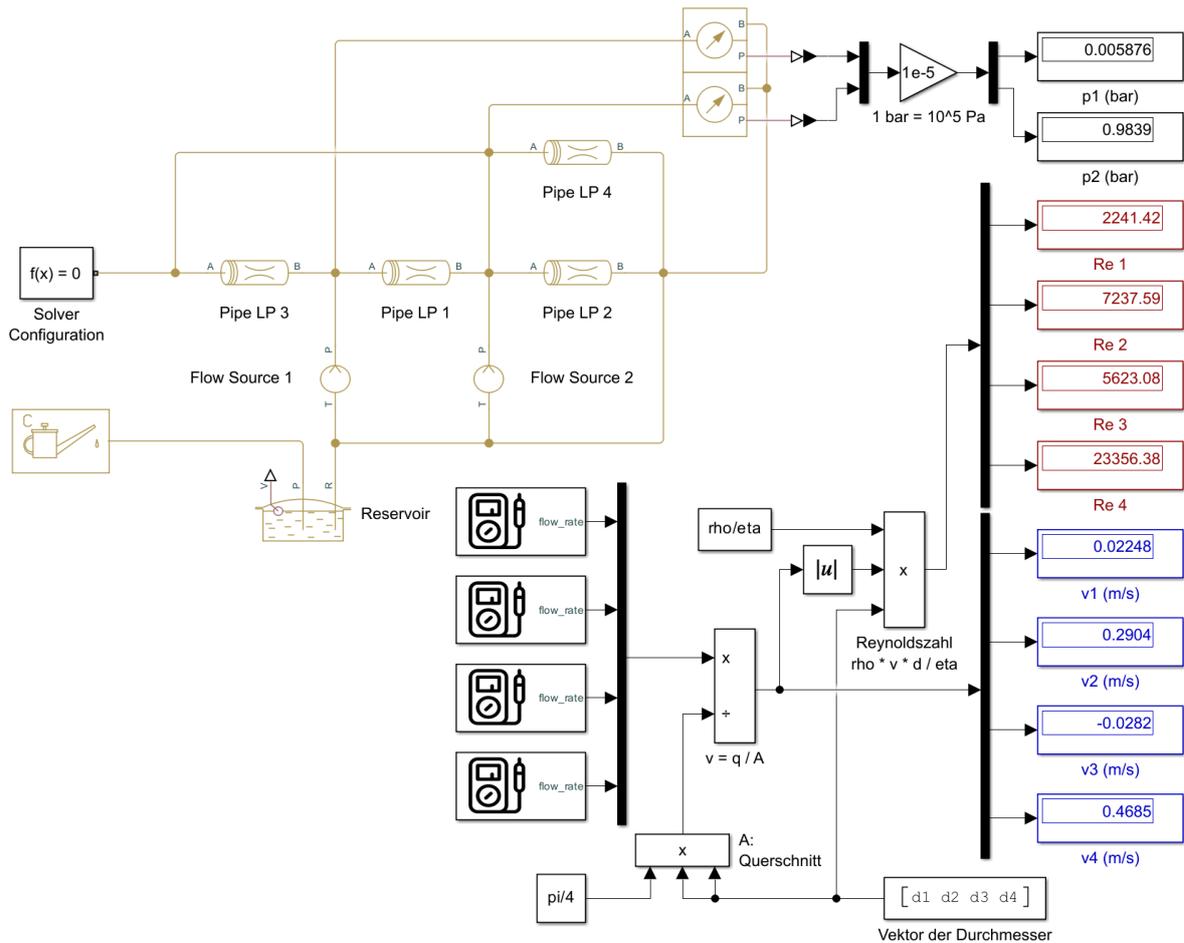


Abbildung 4.4: Simulationslauf in Simscape (Beispiel 1)

5.1.4 Vergleich zu eigener Lösung

Die Ergebnisse in Simscape Fluids und in der programmierten Lösung unterscheiden sich kaum. Zum Vergleich lautet die letzte Iteration der Simulation bei der eigenen Lösung:

Iteration: 14, Funktionsnorm = 2.58574e-15

```

v [m/s]:
  0.023 [Lambda: 0.02797, Re: 2288.09]
  0.292 [Lambda: 0.03495, Re: 7271.72]
 -0.028 [Lambda: 0.03736, Re: 5599.75]
  0.468 [Lambda: 0.02714, Re: 23339.31]

p [bar]:
  0.006
  0.984

```

Bei der Simulation in Simscape wird ein spezieller Löser namens „daessc“ verwendet, bei dem ein System von differential-algebraischen Gleichungen gelöst werden. Dieser ist

standardmäßig für Simscape gewählt. Die Strömungsgeschwindigkeiten, Reynoldszahlen und Knotendrucke liegen auch hier nah an der selbst programmierten Simulation.

5.2 Rein turbulenter Fall

5.2.1 Simulation in DSHplus

Wird der Volumenstrom von Pumpe 1 auf 10 Liter pro Sekunde erhöht, ist man im rein turbulenten Bereich. Die Reynoldszahlen sind nun deutlich über 10^4 , wie man in der Simulation in DSHplus sehen kann.

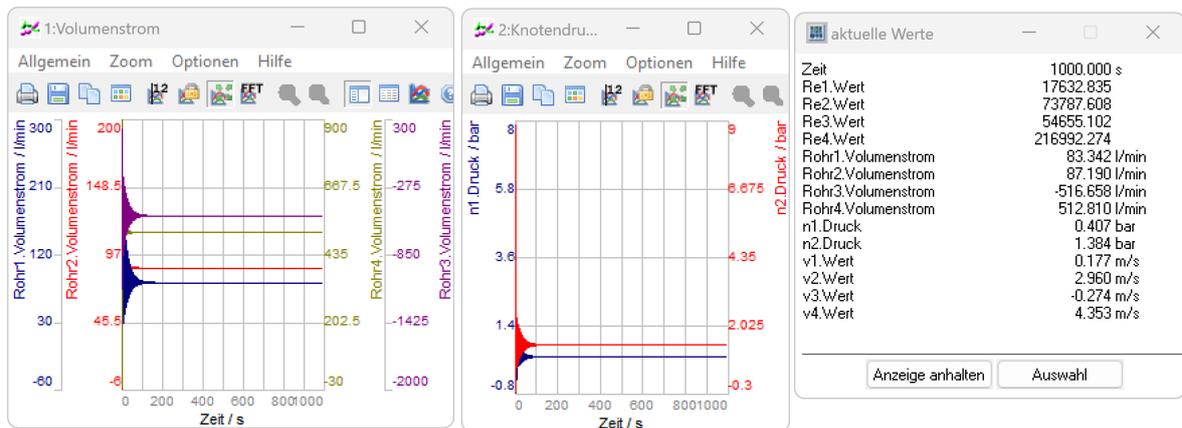


Abbildung 4.5: Simulationslauf in DSHplus (Beispiel 1, rein turbulent)

5.2.2 Simulation in Simscape Fluids

In Simscape werden ähnliche Ergebnisse erzielt, jedoch sind die Druckwerte etwas geringer. Die Strömungsgeschwindigkeiten weichen in der dritten Nachkommastelle minimal ab.

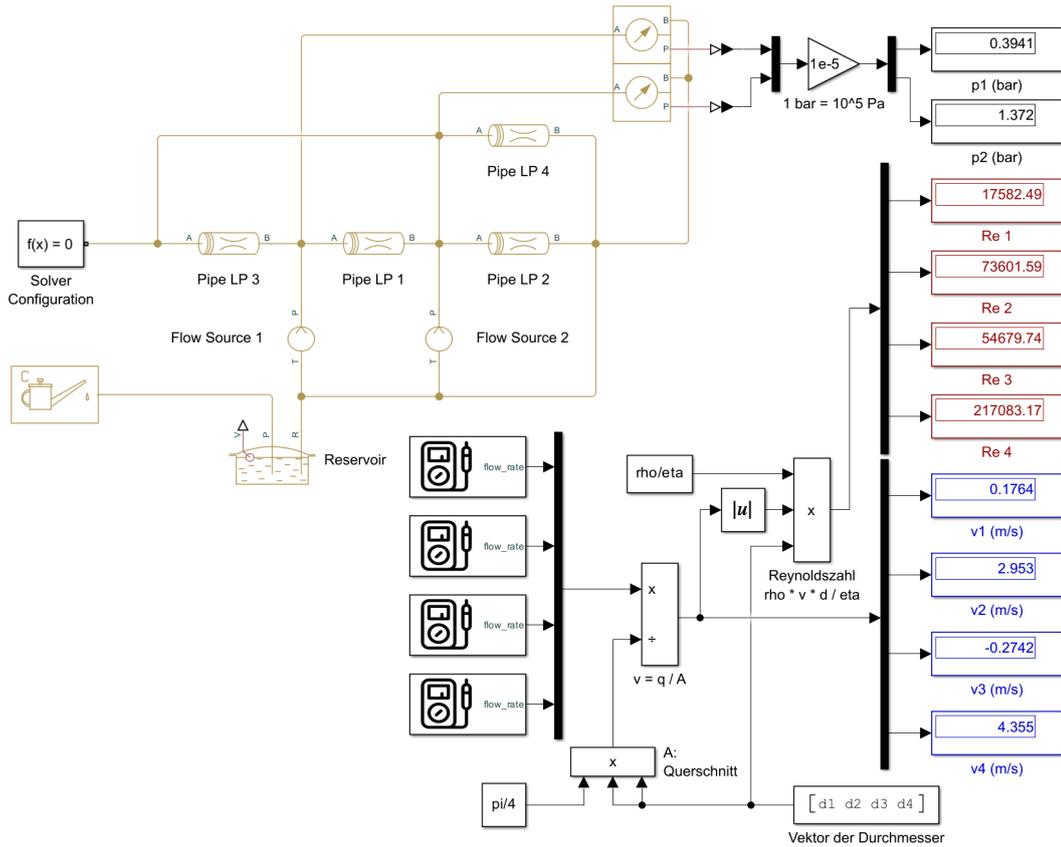


Abbildung 4.6: Simulationslauf in Simscape (Beispiel 2, rein turbulent)

5.2.3 Vergleich der Ergebnisse

Das Simulationsergebnis der letzten Iteration bei der eigenen Lösung lautet:

```

Iteration: 18, Funktionsnorm = 1.90085e-13

v [m/s]:
  0.176 [Lambda: 0.02866, Re: 17591.5]
  2.946 [Lambda: 0.02290, Re: 73418.7]
 -0.274 [Lambda: 0.02373, Re: 54675.3]
  4.357 [Lambda: 0.02093, Re: 217174.6]

p [bar]:
  0.397
  1.374
  
```

Zur Übersicht lassen sich die Ergebnisse in einer Tabelle darstellen. Die Reynoldszahl ist proportional zur Strömungsgeschwindigkeit und einheitenlos, daher bietet diese sich an, die Ergebnisse miteinander zu vergleichen.

	Simscape Fluids (MATLAB, Simulink)	DSHplus 3.14 (FLUIDON)	Eigene Lösung (GNU Octave, Python)
Rohr	Reynoldszahl (einheitenlos)		

1	$1,75825 \times 10^4$	$1,76328 \times 10^4$	$1,75915 \times 10^4$
2	$7,36016 \times 10^4$	$7,37876 \times 10^4$	$7,36016 \times 10^4$
3	$5,46797 \times 10^4$	$5,46551 \times 10^4$	$5,46753 \times 10^4$
4	$2,17083 \times 10^5$	$2,16992 \times 10^5$	$2,17175 \times 10^5$
Knoten	Knotendruck (in Pa)		
1	$0,394 \times 10^5$	$0,407 \times 10^5$	$0,397 \times 10^5$
2	$1,372 \times 10^5$	$1,384 \times 10^5$	$1,374 \times 10^5$

Die Abweichung der eigenen Lösung zur Simulation in Simscape sind geringer als zu DSH-plus. Ein möglicher Grund ist, dass in DSHplus eine andere Näherungsformel für die turbulente Rohrreibung, etwa mit Annahme eines hydraulisch glatten Rohrs, verwendet werden könnte. Die genaue Formel ist in der Dokumentation nicht angegeben, nur das Ersatzschaltbild eines Rohrs mit einer hydraulischen Schaltung von Widerstand, Induktivität und Kapazität. Außerdem bezieht sich die gewählte Dichte des Fluids in DSHplus auf eine Referenztemperatur (313 K) und einen Referenzdruck (0 bar), die Dichte ist also druckabhängig, wenn auch schwach. Nur die kinematische Viskosität lässt sich mit konstant festlegen, indem diese für zwei Referenztemperaturen gleichwertig gesetzt wird.

5.3 Beispielsystem 2

5.3.1 Simulation in Simscape Fluids

Ein komplexeres Beispiel mit acht Rohrleitungen und vier Knoten wird entsprechend Abbildung 4.7 aufgebaut. In jeden Knoten wird ein Volumenstrom eingespeist.

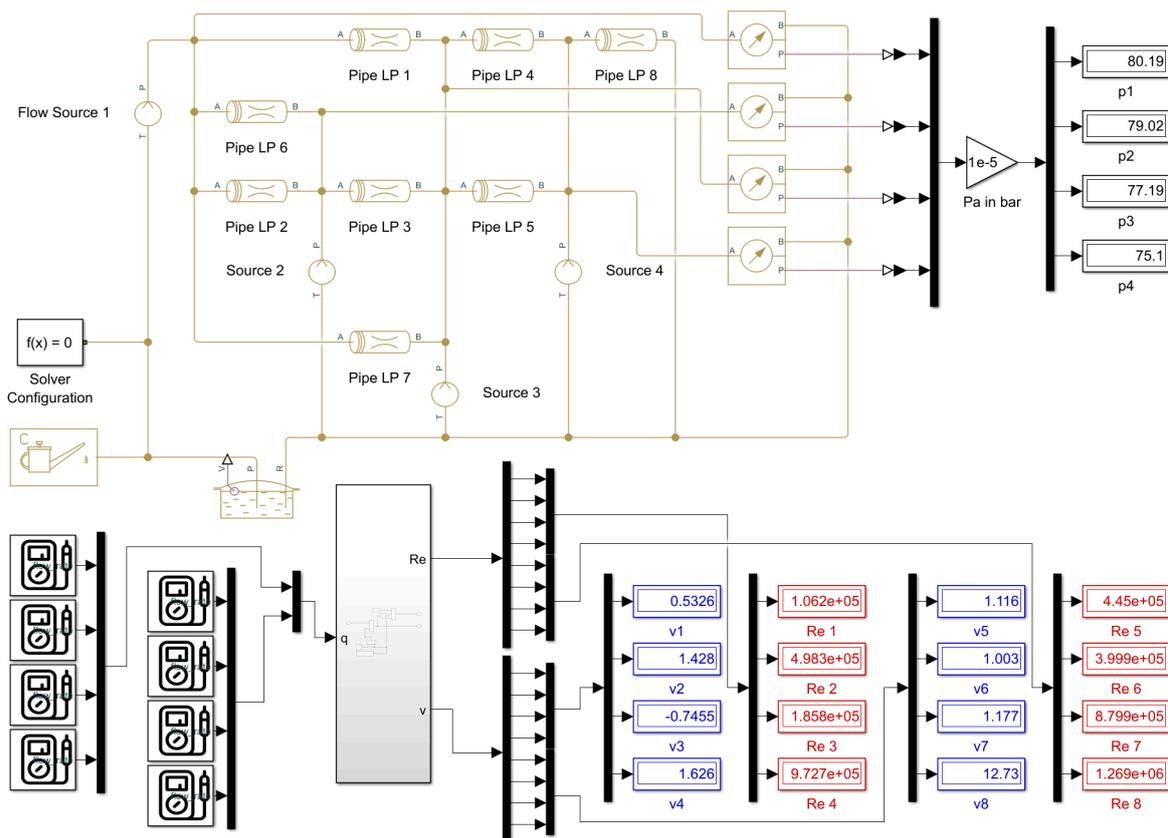


Abbildung 4.7: Simulationslauf in Simscape (Beispiel 2, rein turbulent)

Die Parameter sind in der unteren Tabelle zu finden. Dabei ist für die Vollständigkeit der Knoten 0 angegeben, an denen jeweils eine Seite der Pumpen und mindestens ein Rohr angeschlossen ist. Außerdem sind die absoluten Rauheiten in der Tabelle aufgelistet, welche in Simscape angegeben werden müssen.

Rohr i	Länge (m)	Durchmesser (mm)	rel. Rauheit	abs. Rauheit (mm)	Porthöhe (a, b) (m)
1	500	200	10^{-3}	0,10	(0, 30)
2	330	350	10^{-3}	0,35	(0, 10)
3	500	250	10^{-3}	0,25	(10, 30)
4	330	600	10^{-3}	0,60	(30, 50)

5	460	400	10^{-3}	0,40	(30, 50)
6	760	400	10^{-3}	0,40	(0, 10)
7	420	750	10^{-3}	0,75	(0, 30)
8	500	100	10^{-3}	0,10	(50, 0)
Knoten n	Höhe (m)	Pumpe (m^3/s)	Anschluss an Port (a/b) von Rohr i		
0	0	0,1	8(b)		
1	0	0,8	1(a), 2(a), 6(a), 7(a)		
2	10	- 0,3	2(b), 3(a), 6(b)		
3	30	0,1	1(b), 3(b), 4(a), 5(a), 7(b)		
4	50	- 0,5	4(b), 5(b), 8(a)		

5.3.2 Simulation in DSHplus

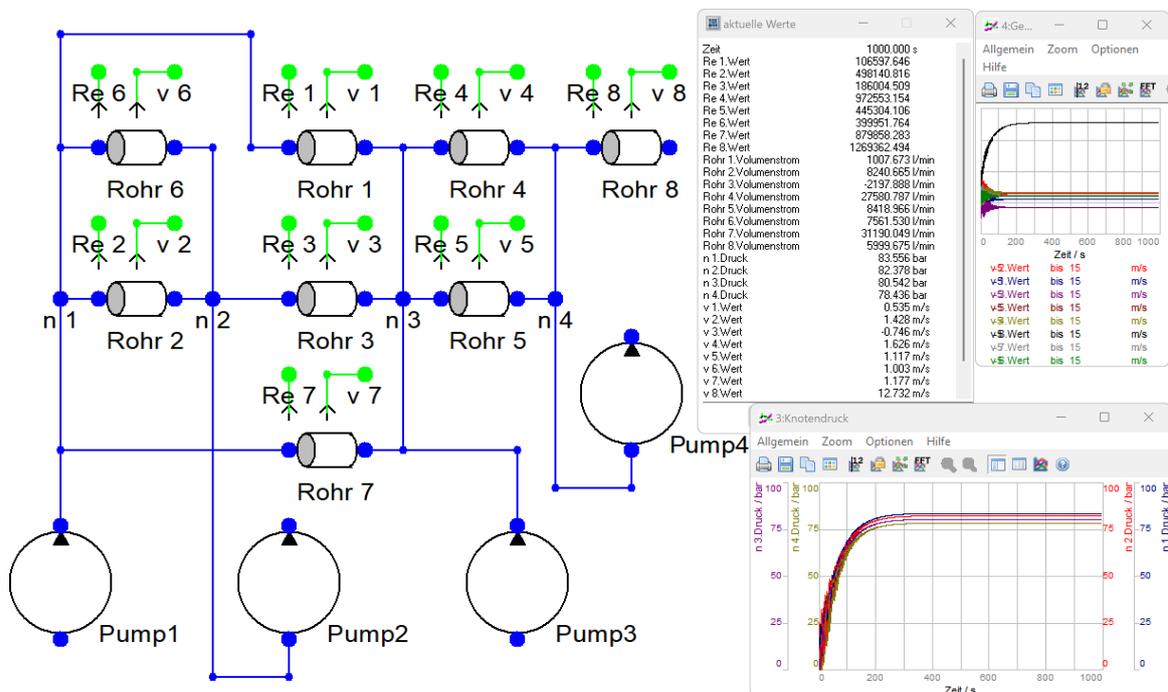


Abbildung 4.8: Simulationslauf in DSHplus (Beispiel 2, rein turbulent)

In DSHplus ist zu erkennen, dass die Volumenströme und Druckwerte einen Zeitraum von etwa 1000 Sekunden für den Einschwingvorgang benötigen (siehe Abbildung 4.8). Die Leitungslängen liegen über 100 Meter, daher wirkt sich die Leitungsinduktivität sichtbar aus.

5.3.3 Simulation in eigener Lösung

In der selbst programmierten Lösung wird die Strömung stationär, also das Fluid beschleunigungsfrei, angenommen, daher spielt die Leitungsinduktivität keine Rolle. Als Startwerte wird der Volumenstrom in jedem Rohr zu 1 Liter pro Sekunde und der Rohrreibbeiwert auf 10^{-4} gesetzt. Die Druckwerte sind zu Beginn auf null gesetzt.

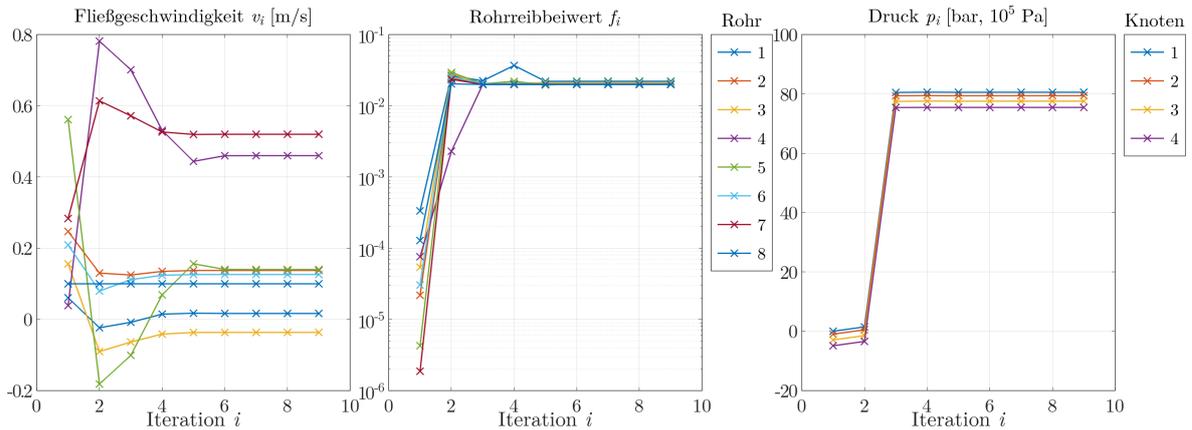


Abbildung 4.9: Variablenwerte bei den Iterationsschritten

Iteration: 9, Funktionsnorm = 2.81127e-13

```
v [m/s]:
  0.530 [Lambda: 0.02206, Re: 105704.5]
  1.428 [Lambda: 0.02024, Re: 498447.7]
 -0.745 [Lambda: 0.02113, Re: 185607.8]
  1.627 [Lambda: 0.01995, Re: 972981.6]
  1.115 [Lambda: 0.02031, Re: 444657.3]
  1.003 [Lambda: 0.02038, Re: 399918.3]
  1.177 [Lambda: 0.01998, Re: 879961.3]
 12.732 [Lambda: 0.01988, Re: 1269419.8]

p [bar]:
 80.549
 79.377
 77.537
 75.437
```

Konvergenzrate (v,p,f) (geschätzt): 1.983, 1.712, 1.968

Bereits in weniger als zehn Iterationen wird eine Konvergenz erzielt, was in Abbildung 5 zu sehen ist. Die Knotengleichungen, welche den Volumenstrombilanzen an jedem Knoten entsprechen, konvergieren direkt zu Beginn der Simulation. Die Gleichungen, welchen für Druckbilanzen und Rohrreibbeiwerte gelten, konvergieren ab der achten Iteration.

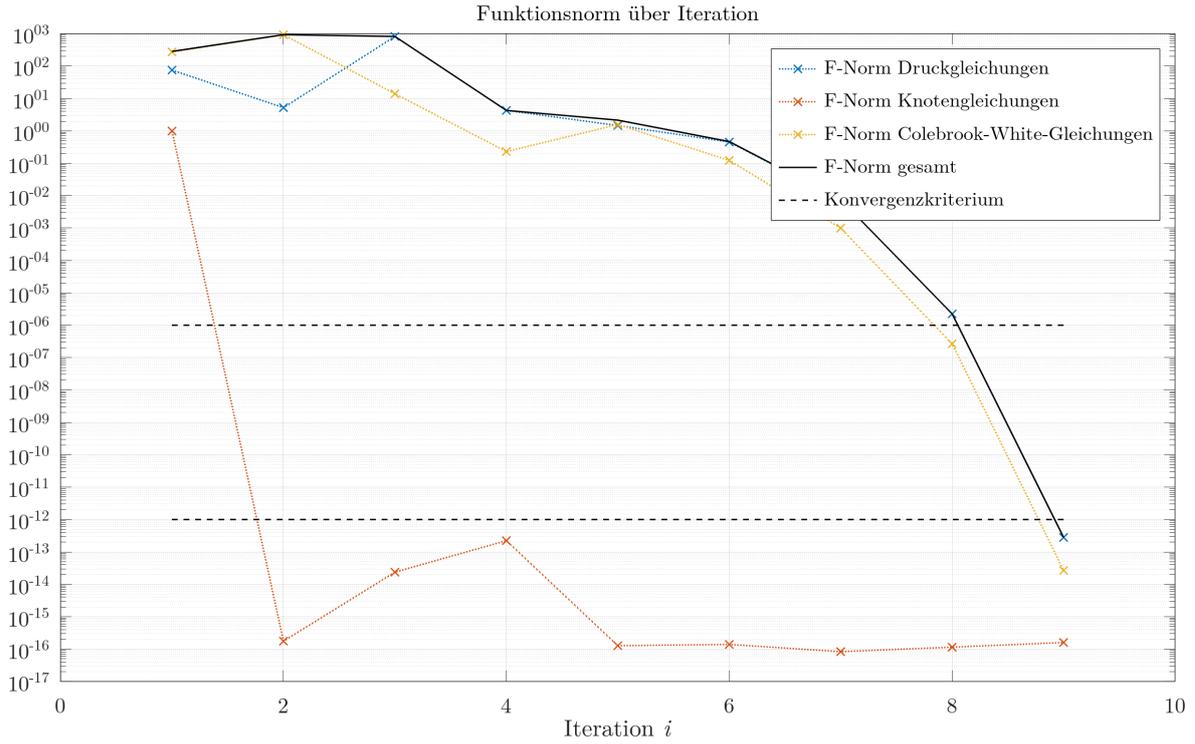


Abbildung 4.10: Konvergenzverhalten

	Simscape Fluids (MATLAB, Simulink)	DSHplus 3.14 (FLUIDON)	Eigene Lösung (GNU Octave, Python)
Rohr	Strömungsgeschwindigkeit (m/s)		
1	0,533	0,535	0,530
2	1,428	1,428	1,428
3	-0,746	-0,746	-0,745
4	1,626	1,626	1,627
5	1,116	1,117	1,115
6	1,003	1,003	1,003
7	1,177	1,177	1,177
8	12,732	12,732	12,732
Knoten	Knotendruck (bar, 10^5 Pa)		
1	80,188	83,556	80,549
2	79,022	82,378	79,377
3	77,191	80,542	77,537
4	75,101	78,436	75,437

6 Zusammenfassung und Fazit

Die Simulation ist in der eigenen Implementierung auch ohne genaue Kenntnis der Jacobi-Matrix möglich, wenn diese numerisch über finite Differenzen ermittelt wird. Dabei funktioniert die Berechnung sowohl mit einer Näherungsformel für die Rohrreibungszahl als auch mit der numerischen Lösung der Colebrook-White-Gleichungen. So entsprechen die Zusammenhänge von Reynoldszahl und Rohrreibungszahl dem Moody-Diagramm.

Insgesamt konnte gezeigt werden, dass die Ergebnisse in der eigenen Implementation sehr nahe an der Software DSHplus und Simscape liegen. Bei besonders hohen Druckwerten, welche bei hoher Strömungsgeschwindigkeit und langer Rohrleitung auftreten, liegen die Druckwerte in DSHplus etwas höher im Vergleich zu Simscape und der eigenen Lösung.

Bei der Strömungsgeschwindigkeit sind die Unterschiede in allen drei Variante bis auf die dritte Nachkommastelle gleich. Der entscheidende Unterschied ist, mit welchen Formeln in der Software DSHplus und Simscape die Druckverluste berechnet werden.

Es kann eine schnelle Konvergenz erzielt werden, wenn eine stationäre Lösung direkt ermittelt wird. Ein ähnliches Verfahren wird in Simscape Fluids verwendet, wobei algebraische Differentialgleichungen gelöst werden. Bei transienten Lösern wie in der Software DSHplus kann es dazu führen, dass eine Simulation aufgrund von Einschwingvorgängen und hochfrequenten Dynamiken relativ lange dauert.

Literaturverzeichnis

- [1] G. W. Howell und T. M. Weathers, „Aerospace Fluid Component Designers' Handbook. Volume I, Revision D“, Redondo Beach CA, TRW Systems Group AD0874542. <https://apps.dtic.mil/sti/citations/AD0874542>
- [2] N.-T. Nguyen, *Mikrofluidik*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2004. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-80069-5>
- [3] L. Böswirth und S. Bschorer, *Technische Strömungslehre*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-05668-1>
- [4] H. Schade, E. Kunz, F. Kameier und C. O. Paschereit, *Strömungslehre*, 4. Aufl. Berlin, Boston: De Gruyter, 2013. <https://doi.org/10.1515/9783110292237>
- [5] D. Will und N. Gebhardt, *Hydraulik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2014. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-44402-3>
- [6] L. F. Moody, „Friction factors for pipe flow“, *Transactions of the ASME*, Nr. 66, S. 671–684, 1944, Art. no. 8. <http://www.ipt.ntnu.no/~asheim/TPG4135/Moody.pdf>
- [7] S. Beck und R. Collins, *Moody diagram: Lines created using Swami and Jain formula*. Verfügbar unter: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Moody_diagram.jpg (Zugriff am: 23. Januar 2024).
- [8] G. Takacs, „A Review of Production Engineering Fundamentals“ in *Sucker-Rod Pumping Handbook*, Elsevier, 2015, S. 13–56. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-417204-3.00002-9>
- [9] W. Francis und M. C. Peters, „The Flow of Fluids“ in *Fuels and Fuel Technology*, Elsevier, 1980, S. 559–569. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-025249-0.50101-4>
- [10] E. Trüeb, „Druckverlustberechnung mit Hilfe der Formel von Prandtl-Colebrook“, *Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie*, Jg. 1961, Nr. 5. <https://doi.org/10.5169/seals-216895>
- [11] H. E. Siekmann und P. U. Thamsen, *Strömungslehre: Grundlagen*, 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-73727-8>

- [12] R. Herz, *Grundlagen der Rohrleitungs- und Apparatechnik*, 2. Aufl. Essen: Vulkan-Verl., 2004. <https://books.google.de/books?id=ZHiZhIz19B4C&pg=PA180>
- [13] L. Zeghadnia, J. L. Robert und B. Achour, „Explicit solutions for turbulent flow friction factor: A review, assessment and approaches classification“, *Ain Shams Engineering Journal*, Jg. 10, Nr. 1, S. 243–252, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.asej.2018.10.007>
- [14] *Kontinuitätsgleichungen*. Verfügbar unter: <https://www.leifiphysik.de/mechanik/stroemungslehre/grundwissen/kontinuitaetsgleichungen> (Zugriff am: 23. Januar 2024).
- [15] Markus Gramsair, „Newton’s method in higher dimensions“, NTNU: Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norwegen, 2017. Verfügbar unter: https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4125/2017v/newton.pdf
- [16] N. Herrmann, *Höhere Mathematik: Für Ingenieure, Physiker und Mathematiker*, 2. Aufl. München: Oldenbourg, 2009. <https://www.degruyter.com/isbn/9783486593518>
- [17] Jonathan R. Senning, „Computing and estimating the rate of convergence“, Mathematics and Computer Science, Gordon College, Wenham, Massachusetts, 2019. <https://www.math-cs.gordon.edu/courses/ma342/handouts/rate.pdf>